Capitolo 1

Rendite

Esercizio 1
Un imprenditore dovrà sostenere un pagamento di $40\,000$ euro tra tre anni. A tal fine inizia ad effettuare dei versamenti trimestrali costanti posticipati presso una banca che remunera questo tipo di depositi al tasso annuo del 2% nel primo anno ed al tasso annuo dell' 1.5% negli anni successivi.

- Determinare l'importo di questi versamenti.

In alternativa, l'imprenditore può effettuare presso un'altra banca dei versamenti semestrali costanti posticipati dell'importo di $6\,000$ euro l'uno, remunerati al tasso annuo nominale convertibile due volte l'anno del 4%.

- Determinare il numero minimo di versamenti necessari per costituire il capitale da pagare e verificare se l'imprenditore riuscirà ad effettuare il pagamento alla scadenza stabilita.

Soluzione
• Per determinare l'importo costante dei versamenti è necessario impostare l'equazione di equivalenza finanziaria. Posto $i_a = 2\%$ e $i_b = 1.5\%$, calcoliamo innanzitutto i tassi trimestrali equivalenti

$$i_{4,a} = (1 + i_a)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1 + 0.02)^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 0.004962931571\,,$$

e

$$i_{4,b} = (1+i_b)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1+0.015)^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 0.00372908894\,.$$

Notiamo inoltre che il tasso $i_{4,a}$ viene applicato per $n_1 = 4$ trimestri e che il tasso $i_{4,b}$ viene invece applicato per gli $n_2 = 8$ trimestri. Posto R l'importo dei versamenti da effettuare ed $M = 40\,000$ il montante necessario dopo tre anni, l'equazione di equivalenza finanziaria risulta

$$R \cdot s_{\overline{n_1}|i_{4,a}} \cdot (1+i_{4,b})^{n_2} + R \cdot s_{\overline{n_2}|i_{4,b}} = M\,,$$

ovvero

$$R \cdot s_{\overline{4}|0.004962} \cdot (1+0.003729)^8 + R \cdot s_{\overline{8}|0.003729} = 40\,000\,,$$

dalla quale deve essere ricava l'incognita R. Analiticamente si ottiene

$$R = \frac{40\,000}{s_{\overline{4}|0.004962} \cdot (1+0.003729)^8 + s_{\overline{8}|0.003729}} = 3\,263.47€\,.$$

- Al tasso annuo nominale convertibile due volte l'anno $j_2 = 4\%$ corrisponde il tasso semestrale composto

$$i_2 = \frac{j_2}{2} = \frac{0.04}{2} = 0.02\,.$$

Il numero minimo di versamenti di importo pari a $R = 6\,000$ euro per costituire il montante M è dato dalla solozione della disequazione in n

$$R \cdot s_{\overline{n}|i_2} \geq M$$

dove n deve essere intero. Sviluppando si ottiene

$$n^* = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{M}{R} \cdot i_2 + 1\right)}{\log(1+i_2)} \right\rceil = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{40\,000}{6\,000} \cdot 0.02 + 1\right)}{\log(1+0.02)} \right\rceil = \lceil 6.32 \rceil =$$
$$= 7 \text{ versamenti semestrali}\,.$$

Poiché tre anni corrispondono a 6 semestri, l'imprenditore, qualora decidesse di adottare questa seconda alternativa per la costituzione del capitale M, non sarà in grado di onorare il pagamento alla scadenza.

Esercizio 2

Un risparmiatore deposita oggi 75 000€ presso una società finanziaria con l'obiettivo di effettuare dei prelevamenti quadrimestrali posticipati dell'importo di 5 500€ ognuno. Sapendo che la società finanziari remunera i depositi in base ad un tasso annuo netto dell'1.75%, determinare:

- il numero massimo di prelievi possibili;
- la consistenza del deposito immediatamente dopo aver effettuato l'ultimo prelievo.

In alternativa, il risparmiatore può depositare i 75 000€ presso una società finanziaria statunitense con l'obiettivo di effettuare 4 prelievi annui posticipati di importo costante in euro. Sapendo che oggi 1€ è scambiato contro 1.31$, prevedendo nei prossimi quattro anni la costanza del tasso di cambio e sapendo che la società finanziaria statunitense remunera i depositi in base a un tasso annuo netto del 2.45%,

- determinare l'importo in euro dei prelievi.

Prevedendo invece nei prossimi quattro anni una svalutazione dell'euro nei confronti del dollaro dell'1.85% e rimanendo invariate le altre condizioni,

- determinare l'importo in euro ed in dollari dei primi due prelievi.

Soluzione

• In generale, il numero massimo di prelievi posticipati si calcola con la formula

$$n^* = \left\lfloor -\frac{\log\left(1 - \frac{S}{P} \cdot i\right)}{\log(1+i)} \right\rfloor,$$

dove S è il deposito iniziale, P è l'importo (costante) dei prelievi e i il tasso d'interesse riconosciuto sul deposito. Dato che il tasso è annuo e i prelievi vengono effettuati tre volte l'anno, calcoliamo il tasso quadrimestrale equivalente

$$i_3 = (1+i)^{\frac{1}{3}} - 1 = (1+0.0175)^{\frac{1}{3}} - 1 \approx 0.005799632572.$$

È ora possibile calcolare il numero massimo di prelievi quadrimestrali posticipati, cioè

$$n^* = \left\lfloor -\frac{\log\left(1 - \frac{S}{P}\cdot i_3\right)}{\log(1+i_3)} \right\rfloor = \left\lfloor -\frac{\log\left(1 - \frac{75\,000}{5\,500}\cdot 0.005799\right)}{\log(1+0.005799)} \right\rfloor =$$
$$= \lfloor 14.24697066 \rfloor = 14.$$

Pertanto, passati 14 quadrimestri dall'apertura del deposito, non sarà più possibile prelevare quadrimestralmente 5 500€ . Tuttavia potrebbe comunque essere ancora possibile prelevare degli importi (non è detto che il deposito si sia completamente azzerato).

Il punto successivo chiede di determinare a quanto ammonta tale rimanenza.

- La consistenza del deposito immediatamente dopo aver effettuato l'ultimo prelievo si calcola come la differenza tra il deposito capitalizzato fino a 14 mesi e il montante di una rendita di importo P di durata pari a 14 mesi[1], ovvero

[1] Per capire il perché di tale affermazione è possibile ragionare come segue. In $t = 0$ si ha il solo capitale S. In $t = 1$, un'istante prima del prelievo, si avrà il capitale S capitalizzato di un periodo

$$S \cdot (1+i_3).$$

Al tempo $t = 2$ si avrà l'importo precedente meno il primo prelievo, capitalizzato di un periodo, ovvero

$$\big(S\cdot(1+i_3) - P\big)\cdot(1+i_3) = S\cdot(1+i_3)^2 - P\cdot(1+i_3).$$

Al tempo $t = 3$, ripetendo il medesimo ragionamento si avrà

$$\big(S\cdot(1+i_3)^2 - P\cdot(1+i_3) - P\big)\cdot(1+i_3) = S\cdot(1+i_3)^3 - P\cdot(1+i_3)^2 - P\cdot(1+i_3).$$

$$\begin{aligned} S\cdot(1+i_3)^{14} - P\cdot s_{\overline{14}|i_3} &= 75\,000\cdot(1+0.005799)^{14} - 5\,500\cdot s_{\overline{14}|0.005799} = \\ &= 75\,000\cdot(1+0.005799)^{14} - \\ &- 5\,500\cdot\frac{(1+0.005799)^{14}-1}{0.005799} = \\ &= 1\,353.45€. \end{aligned}$$

- Dato che il tasso di cambio è previsto costante negli anni successivi, allora a prelievi posticipati di importo costante in euro corrispondono prelievi posticipari di importo costante in dollari. Se all'istante iniziale si scambia il deposito in euro con quello in dollari, si ha

$$S_{\$} = \frac{S_{€}}{S_0^{\$/€}} = \frac{75\,000€}{S_0^{\$/€}}$$

in cui $S_{\$}$ e $S_{€}$ indicano rispettivamente il deposito espresso in dollari ed il medesimo deposito espresso in euro. Il cambio indicato nel testo fornisce il costo in dollari di un euro, cioè

$$1€ = 1.31\$.$$

Quindi, il tasso di cambio euro/dollaro risulta

$$S_0^{€/\$} = 1.31\ \$/€.$$

Ricordando che il cambio dollaro/euro (che è il cambio che serve) è l'inverso del cambio euro/dollaro, abbiamo

$$S_0^{\$/€} = \frac{1}{S_0^{€/\$}} = \frac{1}{1.31\ \$/€}.$$

Quindi al tempo $t = n$ avremo

$$S\cdot(1+i_3)^n - P\cdot\sum_{k=1}^{n-1}(1+i_3)^k = S\cdot(1+i_3)^n - P\cdot s_{\overline{n}|i_3}.$$

Possiamo ora determinare l'importo in dollari del deposito di $75\,000€$

$$S_{\$} = \frac{75\,000€}{\frac{1}{1.31\ \$/€}} = 75\,000 \cdot 1.31\$ = 98\,250\$.$$

A questo punto, indicando con $i_F = 2.45\%$ il tasso di interesse vigente per l'investimento in valuta estera, per determinare l'importo dei prelievi posticipati di importo costante in dollari è sufficiente determinare l'importo dei prelievi che è finanziariamente equo scambiare con il valore attuale in dollari, cioè

$$S_{\$} = P_{\$} \cdot a_{\overline{4}|i_F}.$$

Risolvendo rispetto a $P_{\$}$, si ha

$$P_{\$} = \frac{S_{\$}}{a_{\overline{4}|i_F}} = \frac{98\,250}{\frac{1-(1+0.0245)^{-4}}{0.0245}} = 26\,085.16\$.$$

Infine, per ottenere l'importo in euro, basta dividere l'importo del prelievo in dollari per il tasso di cambio euro/dollaro, ossia

$$P_{€} = \frac{P_{\$}}{S_0^{€/\$}} = \frac{26\,085.16\ \$}{1.31\ \$/€} = 19\,912.34€.$$

Si noti che tale operazione è giustificata dal fatto che il tasso di cambio è previsto constante nei quattro anni dell'operazione finanziaria.

• Si ricordi che, in caso di svalutazione/rivalutazione della moneta nazione in confronto a quella estera, investire (o finanziarsi) in valuta estera al tasso di interesse estero i_F è equivalente a investire (o finanziarsi) in euro al tasso

$$i_{eff} = \frac{i_F - \alpha}{1+\alpha}.$$

In questo caso, si ha $\alpha = -0.0185$, ossia l'euro si svaluta ogni anno nel confronto del dollaro dell' 1.85%. Pertanto il tasso effettivo risulta

$$i_{eff} = \frac{0.0245 - (-0.0185)}{1 - 0.0185} \approx 0.04381049414.$$

A questo punto, per determinare l'importo dei prelievi posticipati di importo costante in euro è sufficiente determinare l'importo dei prelievi che è finanziariamente equo scambiare con il valore attuale in euro, cioè

$$S_{€} = P_{€} \cdot a_{\overline{4}|i_{eff}},$$

da cui

$$P_{€} = \frac{S_{€}}{a_{\overline{4}|0.043810}} = \frac{75\,000}{\frac{1-(1+0.043810)^{-4}}{0.043810}} = 20\,847.62€.$$

Per determinare l'importo in dollari dei primi due prelievi è sufficiente calcolare il tasso di cambio euro/dollaro in $t = 1$ e in $t = 2$, ossia

$$S_1^{€/\$} = S_0^{€/\$} \cdot (1+\alpha) = 1.31 \cdot (1 - 0.0185) = 1.285765\ \$/€$$

$$S_2^{€/\$} = S_0^{€/\$} \cdot (1+\alpha)^2 = 1.31 \cdot (1 - 0.0185)^2 = 1.261978\ \$/€.$$

Quindi il primo prelievo in dollari è dato da

$$P_{\$,1} = \frac{P_{€}}{S_1^{\$/€}} = P_{€} \cdot S_1^{€/\$} = 20\,847.62\ € \cdot 1.285765\ \$/€ = 26\,805.14\$,$$

mentre il secondo è pari a

$$P_{\$,2} = \frac{P_{€}}{S_2^{\$/€}} = P_{€} \cdot S_2^{€/\$} = 20\,847.62\ € \cdot 1.261978\ \$/€ = 26\,309.25\$.$$

Si noti che gli importi in dollari dei primi due prelievi sono decrescenti. Ciò è coerente con il fatto che l'euro si è svalutato nei confronti del dollaro.
Nota – Anche il punto precedente poteva essere risolto ricordando che investire (o finanziarsi) in valuta estera al tasso di interesse i_F è equivalente a investire (o finanziarsi) in euro al tasso i_{eff}. In particolare, nel punto precedente si avrebbe avuto $\alpha = 0$ in quanto si era ipotizzato la costanza del tasso di cambio, dalla quale sarebbe conseguito $i_{eff} = i_F$.

Esercizio 3
Il primo di luglio del 2004 un risparmiatore ha versato un capitale C in un conto di deposito presso il proprio istituto di credito, conto che è stato remunerato in base al tasso di interesse annuo del 2%. A partire da questa data, alla fine di ogni mese il risparmiatore ha versato sullo stesso conto l'importo di 250 euro. L'11 aprile 2005 l'istituto di credito ha variato il tasso di interesse, portandolo al 2.5%. Dopo 4 anni e 3 mesi dal versamento iniziale la consistenza del deposito è uguale a $26\,500€$.

- Si determini l'importo C versato inizialmente.
- Si determini dopo quanto tempo dal primo di luglio del 2004 la consistenza del deposito supererà i $28\,000€$.
- Si determini la consistenza del deposito al primo di febbraio del 2009.

Soluzione
• Inizialmente si deve individuare una data di valutazione in cui effettuare i calcoli. Premesso che a tal fine non c'è una data preferibile rispetto alle altre (proprietà di scindibilità), si sceglie quella di fine periodo, ossia quella del 01/10/2008. Infatti, se si parte dalla data iniziale del 01/07/2004, dopo 4 anni e 3 mesi arriviamo alla data precedentemente individuata. Si noti inoltre che 4 anni e 3 mesi equivalgono a

$$\text{4 anni e 3 mesi} = 4 \cdot 12 \text{ mesi} + 3 \text{ mesi} = 51 \text{ mesi}.$$

E proprio perché si tratta di versamenti mensili, conviene ragionare in termini di intervalli di tempo e tassi mensili. Determiniamo questi ultimi. Nel periodo dal 01/07/2004 al 10/04/2005, dato il tasso annuo $i_a = 2\%$, il tasso mensile equivalente risulta

$$i_{12,a} = (1 + i_a)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1 + 0.02)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0.001651581302,$$

mentre nel periodo 11/04/2005–01/10/2008, dato il tasso annuo $i_b = 2.5\%$, si ha

$$i_{12,b} = (1 + i_b)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1 + 0.025)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0.002059836270.$$

A questo punto si tratta solo di esprimere correttamente il numero di mesi negli intervalli di tempo di interesse per il problema. In particolare dal 01/07/2004 al 10/04/2005 si hanno

$$9 \text{ mesi e } 10 \text{ giorni} = 9 \text{ mesi} + \frac{10}{30} \text{ mesi} = \frac{28}{3} \text{ mesi} \approx 9.33 \text{ mesi}.$$

Poiché in totale si tratta di 51 mesi, tra 11/05/2005 e 01/10/2008 si hanno

$$51 \text{ mesi} - \frac{28}{3} \text{ mesi} = \frac{125}{3} \text{ mesi} \approx 41.67 \text{ mesi}.$$

Cosideriamo ora le singole quantità investite. Il capitale versato inizialmente viene capitizzato fino al 10/04/2005 al tasso $i_{12,a}$ e successivamente al tasso $i_{12,b}$. Il montante al tempo finale 01/10/2008 risulta quindi[2]

$$\begin{aligned} M_1 &= C \cdot (1 + i_{12,a})^{\frac{28}{3}} \cdot (1 + i_{12,b})^{\frac{125}{3}} = \\ &= C \cdot (1 + 0.001651)^{\frac{28}{3}} \cdot (1 + 0.002059)^{\frac{125}{3}} = \\ &= C \cdot 1.106431842. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda i singoli versamenti mensili di 250€, il loro montante può essere calcolato utilizzando il montante di una rendita unitaria (per lunghezze mensili intere) e la legge di capitalizione composta (per le lunghezze non intere). I versamenti fino all'1 aprile 2005 verranno capitalizzati al tasso $i_{12,a}$ ed al medesimo tasso ancora per 10 giorni. Tale importo verrà poi capitalizzato al tasso $i_{12,b}$ fino a scadenza. Si ha quindi

$$\begin{aligned} M_2 &= 250 \cdot s_{\overline{9}|i_{12,a}} \cdot (1 + i_{12,a})^{\frac{10}{30}} \cdot (1 + i_{12,b})^{\frac{125}{3}} = \\ &= 250 \cdot s_{\overline{9}|0.001651} \cdot (1 + 0.001651)^{\frac{1}{3}} \cdot (1 + 0.002059)^{\frac{125}{3}} = \\ &= 250 \cdot 9.876150807. \end{aligned}$$

Infine, il montante fino a scadenza dei versamenti dall'1 aprile 2005 può essere calcolato con il valore montante di una rendita unitaria al tasso

[2] Nonostante nei conteggi vengano riportati i tassi troncati alla sesta cifra decimale, i risultati tengono conto massimo grado di approssimazione fornito dal calcolatore.

$i_{12,b}$. In particolare si ha

$$M_3 = 250 \cdot s_{\overline{42}|i_{12,b}} = 250 \cdot s_{\overline{42}|0.002059} = 250 \cdot 43.82322156.$$

Avendo determinato il montante complessivo dell'investimento (pari a $M_1+M_2+M_3$) in funzione del capitale iniziale C , è ora possibile risolvere l'equazione

$$C \cdot 1.106431842 + 250 \cdot 9.876150807 + 250 \cdot 43.82322156 = 26\,500\,,$$

da cui

$$C = \frac{26\,500 - 250 \cdot 9.876150807 - 250 \cdot 43.82322156}{1.106431842} = 11\,817.41€.$$

• L'importo di $28\,000€$ è maggiore dell'importo di $26\,500€$. Quindi la data di esigibilità dell'importo di $28\,000€$, che è incognita, è successiva alla data di esigibilità dell'importo di $26\,500€$, che è nota ed è il 01/10/2008. Quindi, per determinare quando la consistenza del deposito supererà i $28\,000$ euro si deve calcolare quando il valore del montante dell'importo di $26\,500$ euro sommato alla costituzione di capitale determinata dai versamenti mensili supererà i $28\,000$ euro, cioè

$$26\,500 \cdot (1 + i_{12,b})^n + 250 \cdot s_{\overline{n}|i_{12,b}} > 28\,000,$$

ovvero

$$26\,500 \cdot (1 + 0.002059)^n + 250 \cdot \frac{(1 + 0.002059)^n - 1}{0.002059} > 28\,000\,.$$

Raccogliendo $(1 + 0.002059)^n$ e portando al secondo membro le quantità non incognite, si ha

$$(1 + 0.002059)^n > \frac{28\,000 + \frac{250}{0.002059}}{26\,500 + \frac{250}{0.002059}} = \frac{28\,000 \cdot 0.002059 + 250}{26\,500 \cdot 0.002059 + 250},$$

ovvero

$$n > \frac{\log\left(\frac{28\,000 \cdot 0.002059 + 250}{26\,500 \cdot 0.002059 + 250}\right)}{\log(1 + 0.002059)} \approx 4.904956891 \text{ mesi},$$

ovvero, secondo la convenzione dell'anno commerciale, circa

$$4 \text{ mesi e } 0.904956891 \cdot 30 \approx 4 \text{ mesi e } 27.148706730 \text{ giorni.}$$

- Poiché dal 01/10/2008 al 01/02/2009 si hanno esattamente 4 mesi, il montante in tale data risulta

$$26\,500 \cdot (1 + 0.002059)^4 + 250 \cdot s_{\overline{4}|0.002059} = 27\,722.11€.$$

Esercizio 4

Il primo febbraio del 2002 un risparmiatore ha versato un capitale C in un conto di deposito presso il proprio istituto di credito, conto che è stato remunerato in base al tasso di interesse annuo del 4%. A partire da questa data, alla fine di ogni mese il risparmiatore ha versato sullo stesso conto l'importo di 250 euro. Il 20 novembre 2002 l'istituto di credito ha variato il tasso di interesse, portandolo al 3.5%. Dopo 3 anni e 4 mesi dal versamento iniziale la consistenza del deposito è uguale a 26 500€ .

- Si determini l'importo C versato inizialmente.
- Si determini dopo quanto tempo dal primo febbraio del 2002 la consistenza del deposito supererà i 35 000€ .
- Si determini la consistenza del deposito al primo di febbraio del 2009.

Soluzione

La risoluzione è la medesima dell'esercizio precedente.

- $C = 14\,135.61€$;
- Dal 1 ° febbraio 2002 bisogna attendere 65 mesi e 19 giorni;
- 41 769.72€ .

Esercizio 5

Un'impresa edile intende stipulare con la società finanziaria *TiFaccio-Bene* un contratto di leasing della durata di cinque anni relativo ad un escavatore il cui prezzo di listino è di 42 500€. Il contratto prevede quanto segue:

1. il versamento all'epoca iniziale di una quota uguale al 15% del valore dell'escavatore;

2. il pagamento di canoni trimestrali posticipati per tutta la durata del contratto, i primi sei di importi uguali fra di loro ed i rimanenti di importi doppi a quelli dei primi sei;

3. il versamento all'epoca finale di una quota di riscatto uguale al 12.5% del valore del bene.

Si sa che la società finanziaria *TiFaccioBene* può acquistare l'escavatrice beneficiando di uno sconto del 2.5% sul prezzo di listino.

- Determinare i valori dei canoni trimestrali che permettono alla società finanziaria *TiFaccioBene* di ottenere dall'operazione di leasing in oggetto un TIR annuo uguale al 9%.

In alternativa al contratto di leasing con la società finanziaria *TiFaccioBene*, l'impresa edile può stipulare un contratto di leasing con un'altra società finanziaria, la *TiFaccioMeglio*. Quest'ultimo contratto risulta uguale a quello precedente con l'unica differenza che prevede il versamento all'epoca finale di una quota di riscatto uguale al 7.5% del valore del bene. Si sa:

1. che la società finanziaria *TiFaccioMeglio* può acquistare l'escavatore beneficiando di uno sconto del 10% sul prezzo di listino;

2. che i valori dei canoni sono uguali a quelli dell'altro contratto di leasing.

- In queste ultime ipotesi, determinare il valore del TIR annuo dell'operazione di leasing per la società finanziaria *TiFaccioMeglio*.

Soluzione

• Calcoliamo le quantità di interesse relative al contratto di leasing. Il valore del bene concesso in leasing è pari al prezzo di listino scontanto del 2.5%, dal momento che la società *TiFaccioBene* può beneficiare di tale sconto; quindi

$$L = 42\,500 \cdot (1 - 0.025) = 41\,437.50€.$$

La quota da versare all'epoca iniziale risulta pari al 15% del valore dell'escavatore, ossia

$$A = 0.15 \cdot L = 0.15 \cdot 41\,437.50 = 6\,215.63€,$$

mentre la quota per il riscatto finale è pari al 12.5% del medesimo valore

$$F = 0.125 \cdot L = 0.125 \cdot 41\,437.50 = 5\,179.69€.$$

Infine, essendo previsti quattro canoni trimestrali all'anno per cinque anni, questi saranno in totale $n = 20$. Dato che tali canoni sono trimestrali, è necessario calcolare il TIR trimestrale equivalente al TIR annuo fornito dal problema. Posto $i = TIR$ annuo, abbiamo

$$i_4 = (1 + i)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1 + 0.09)^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 0.02177818086.$$

A questo punto è possibile impostare l'equazione dell'equivalenza finanziaria tra le varie quantità coinvolte. Bisogna però aver l'accortezza di notare che le rate R_i non sono costanti, ma rispettano la sequente condizione

$$R_k = \begin{cases} R & \text{se } k = 1, 2, \ldots, 6 \\ 2R & \text{se } k = 7, 8, \ldots, n. \end{cases}$$

Quindi l'operazione di leasing è finanziariamente equa se

$$L = A + R \cdot a_{\overline{6}|i_4} + 2R \cdot a_{\overline{20-6}|i_4} \cdot (1 + i_4)^{-6} + F \cdot (1 + i_4)^{-20}\,.$$

Risolvendo rispetto a R (la quale è la nostra incognita, essendo tutte le altre quantità note) otteniamo

$$R = \frac{L - A - F \cdot (1+i_4)^{-20}}{a_{\overline{6}|i_4} + 2 \cdot a_{\overline{14}|i_4} \cdot (1+i_4)^{-6}}.$$

Sostituendo i valori numerici noti, otteniamo

$$R = \frac{41\,437.50 - 6\,215.63 - 5\,179.69 \cdot (1+0.021778)^{-20}}{a_{\overline{6}|0.021778} + 2 \cdot a_{\overline{14}|0.021778} \cdot (1+0.021778)^{-6}} = 1198.45€.$$

Pertanto gli importi delle rate sono pari a

$$R_k = \begin{cases} 1198.45\,€ & \text{se } k = 1, 2, \ldots, 6 \\ 2396.90\,€ & \text{se } k = 7, 8, \ldots, n. \end{cases}$$

- Nel caso della società *TiFaccioMeglio*, le condizioni contrattuali prevedono un valore del bene pari a

$$L = 42\,500 \cdot (1 - 0.1) = 38\,250€,$$

e una quota da versare all'epoca iniziale sempre pari a 15% del valore del bene, ossia

$$A = 0.15 \cdot L = 0.15 \cdot 38\,250 = 5\,737.50€.$$

La quota per il riscatto finale è invece pari al 7.5% del medesimo valore

$$F = 0.075 \cdot L = 0.075 \cdot 38\,250 = 2\,868.75€.$$

Inoltre sappiamo che le rate del leasing sono le medesime della società *TiFaccioBene*, ovvero

$$R_k = \begin{cases} 1198.45\,€ & \text{se } k = 1, 2, \ldots, 6 \\ 2396.90\,€ & \text{se } k = 7, 8, \ldots, n. \end{cases}$$

A questo punto, dal momento che viene richiesto di calcolare il TIR di quest'operazione, basta risolvere l'equazione

$$L = A + R \cdot a_{\overline{6}|i_4} + 2R \cdot a_{\overline{14}|i_4} \cdot (1+i_4)^{-6} + F \cdot (1+i_4)^{-20}$$

rispetto a i_4, avendo sostituito i valori noti. Abbiamo

$$38\,250 = 5\,737.50 + 1198.45 \cdot a_{\overline{6}|i_4} + 2396.90 \cdot a_{\overline{14}|i_4} \cdot (1+i_4)^{-6} + \\ + 2\,868.75 \cdot (1+i_4)^{-20} \;,$$

$$0 = -32512.50 + 1198.45 \cdot a_{\overline{6}|i_4} + 2396.90 \cdot a_{\overline{14}|i_4} \cdot (1+i_4)^{-6} + \\ + 2\,868.75 \cdot (1+i_4)^{-20},$$

la quale può essere risolta per con una procedura “sbaglia e prova”. A tal fine si nota che il membro di destra è una funzione strettamente decrescente rispetto a i_4 (infatti la sua derivata prima rispetto a i_4 è ovunque negativa).

Chiamando $f(i_4)$ il membro di destra, dobbiamo trovare $i_4^* \geq 0$ tale che

$$f(i_4^*) = 0.$$

Come stima iniziale di tale valore, si può utilizzare il TIR relativo al contratto con la società *TiFaccioBene*, cioè

$$i_{4,0} = 0.02177818086.$$

Tale quantità pare ragionevole quale stima iniziale del TIR della società *TiFaccioMeglio* in quanto le caratteristiche del primo e del secondo contratto di leasing sono abbastanza simili fra loro (e quindi anche i rispettivi TIR non dovrebbero essere particolarmente dissimili tra loro). Sostituendo $i_{4,0}$, otteniamo

$$f(i_{4,0}) \approx 1207.$$

Essendo tale valore maggiore di zero, dobbiamo scegliere $i_{4,1}$ in maniera da diminuire il valore della funzione. Pertanto, come precedentemente mostrato, dato che la funzione da annullare è strettamente decrescente, dobbiamo aumentare la scelta del tasso (si veda la figura 1.1). Optiamo per $i_{4,1} = 0.028$. Ad esso corrisponde

$$f(i_{4,1}) \approx -1068,$$

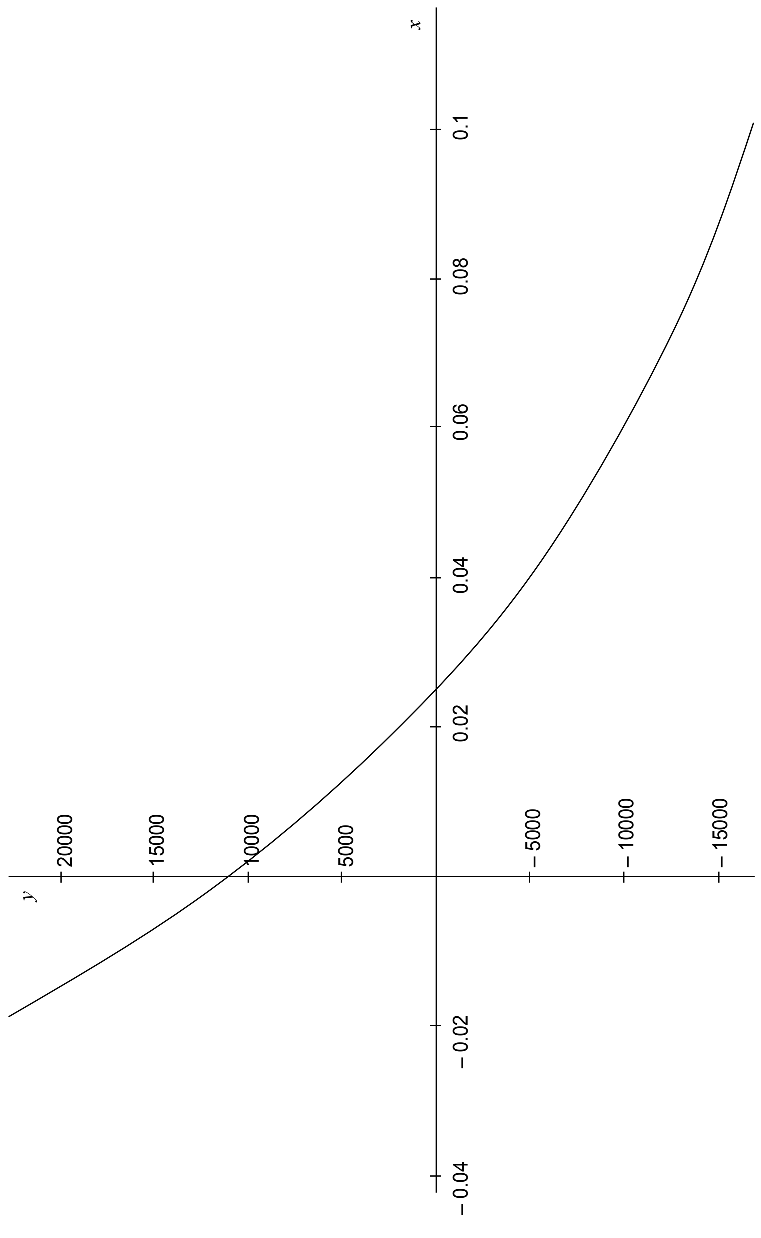

Figura 1.1: Grafico della funzione al membro di destra.

al quale però corrisponde un valore negativo. Dunque $i_{4,0} < i_4^* < i_{4,1}$. Dopo varie iterazioni, si trova

$$i_4^* = 0.0250073,$$

al quale corrisponde $f\left(i_4^*\right) \approx 0.00032$. Trovato tale tasso trimestrale, il corrispondente TIR annuo risulta

$$i^* = (1 + i_4^*)^4 - 1 = (1 + 0.0250073)^4 - 1 = 0.1038443 \approx 10.38\%.$$

Esercizio 6
Un'impresa agricola stipula con una società finanziaria un contratto di leasing della durata di sei anni e tre mesi relativo ad una mietitrebbiatrice il cui prezzo di listino è pari a 29 500€. Il contratto prevede:

1. il versamento immediato di una quota uguale al 20% del valore del bene, calcolato sulla base del costo per la società finanziaria;

2. il versamento di canoni semestrali posticipati differiti di tre mesi, i primi sette di importo costante fra di loro ed i successivi di importo uguale alla metà di quello dei primi sette;

3. il versamento al termine del periodo di locazione di un importo uguale al 7.5% del valore del bene, calcolato sulla base del costo per la società finanziaria, per il riscatto del bene.

Sapendo che la società ha acquistato il bene beneficiando di uno sconto del 3% sul prezzo di listino e che la società finanziaria intende ottenere dall'operazione di leasing un tasso di rendimento annuo del 9% in corrispondenza dei primi sette canoni ed un tasso di rendimento annuo del 7% in corrispondenza dei successivi canoni,

- determinare l'importo dei canoni.

Soluzione

• Calcoliamo le quantità di interesse relative al contratto di leasing. Il valore del bene concesso in leasing è pari al prezzo di listino scontanto del 3%, dal momento che la società finanziaria può beneficiare di tale sconto; quindi

$$L = 29\,500 \cdot (1 - 0.03) = 28\,615€.$$

La quota da versare all'epoca iniziale risulta pari al 20% del precedente valore, ossia

$$A = 0.2 \cdot L = 0.2 \cdot 28\,615 = 5\,723€,$$

mentre la quota per il riscatto finale è pari al 7.5% del medesimo valore

$$F = 0.075 \cdot L = 0.075 \cdot 28\,615 = 2\,146.13€.$$

Per quanto riguarda la durata del leasing, questa è fissata da contratto pari a 6 anni e 3 mesi. Essendo la frequenza della rate semestrale, conviene esprimere tale durata in semestri, ossia

$$6 \text{ anni e } 3 \text{ mesi} = 6 \cdot 2 \text{ semestri} + 3 : 6 \text{ semestri} = 12.5 \text{ semestri}.$$

Inoltre sappiamo che le rate sono posticipate e differite di 3 mesi (che sono gli 0.5 semestri di cui sopra). Quindi le rate in totale sono $n = 12$ e di importo così definito

$$R_k = \begin{cases} R & \text{se } k = 1, 2, \ldots, 7 \\ \frac{R}{2} & \text{se } k = 8, 9, \ldots, n. \end{cases}$$

Infine, trattandosi di rate semestrali e avendo a disposizione tassi annui, risulta necessario trovare i tassi semestrali equivalenti. Posto $i_a = 9\%$ il tasso di rendimento relativo ai primi sette canoni e $i_b = 7\%$ quello relativo ai successivi, si trova

$$i_{2,a} = (1 + i_a)^{\frac{1}{2}} - 1 = (1 + 0.09)^{\frac{1}{2}} - 1 \approx 0.04403065088$$

e

$$i_{2,b} = (1 + i_b)^{\frac{1}{2}} - 1 = (1 + 0.07)^{\frac{1}{2}} - 1 \approx 0.03440804327\,.$$

A questo punto è possibile impostare l'equazione dell'equivalenza finanziaria tra le varie quantità coinvolte. Bisogna però aver l'accortezza di ricordate che le rate non sono costanti (e vi è inotre un differimento di 0.5 semestri).

Dunque l'operazione di leasing è finanziariamente equa se

$$\begin{aligned} L = A + R \cdot {}_{0.5/}a_{\overline{7}|i_{2,a}} + \frac{R}{2} \cdot a_{\overline{12-7}|i_{2,a}} \cdot (1+i_{2,b})^{-7.5} + F \cdot \\ \cdot (1+i_{2,a})^{-7.5} \cdot (1+i_{2,b})^{-5}, \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} L = A + R \cdot a_{\overline{7}|i_{2,a}} \cdot (1+i_{2,a})^{-0.5} + \frac{R}{2} \cdot a_{\overline{5}|i_{2,b}} \cdot (1+i_{2,a})^{-7.5} + \\ + F \cdot (1+i_{2,a})^{-7.5} \cdot (1+i_{2,b})^{-5}. \end{aligned}$$

Risolvendo rispetto a R (la quale è la nostra incognita, essendo tutte le altre quantità note) otteniamo

$$R = \frac{L - A - F \cdot (1+i_{2,a})^{-7.5} \cdot (1+i_{2,b})^{-5}}{a_{\overline{7}|i_{2,a}} \cdot (1+i_{2,a})^{-0.5} + \frac{1}{2} \cdot a_{\overline{5}|i_{2,b}} \cdot (1+i_{2,a})^{-7.5}}.$$

Sostituendo i valori numerici noti, otteniamo

$$\begin{aligned} R = \frac{28\,615 - 5\,723 - 2\,146.13 \cdot (1+0.044030)^{-7.5} \cdot (1+0.034408)^{-5}}{a_{\overline{7}|0.044030} \cdot (1+0.044030)^{-0.5} + \frac{1}{2} \cdot a_{\overline{5}|0.034408} \cdot (1+0.044030)^{-7.5}} = \\ = 2906.64\text{€}. \end{aligned}$$

Pertanto gli importi delle rate sono pari a

$$R_k = \begin{cases} 2906.64\,\text{€} & \text{se } k = 1, 2, \ldots, 7 \\ 1453.32\,\text{€} & \text{se } k = 8, 9, \ldots, n. \end{cases}$$

Capitolo 2

Ammortamenti

Esercizio 1
Per l'acquisto di un immobile, un lavoratore ha contratto con un istituto bancario un mutuo di $110\,000$ euro da rimborsare in 10 anni mediante rate trimestrali immediate posticipate con quote di capitale costanti. Si sa che la prima quota di interessi è pari a $2\,006.91$ euro.

- Trovare il tasso di interesse annuo i e scrivere le prime tre e le ultime due righe del piano di ammortamento, indicando come sono stati svolti i calcoli.

Immediatamente dopo il pagamento della quattordicesima rata, su richiesta del cliente la banca acconsente alla rinegoziazione del mutuo alle seguenti condizioni: si passa a un ammortamento a rate costanti, con una riduzione del tasso di interesse i del 15%, un aumento del debito residuo di una penale del 2.25% e di 350 euro per costi di rinegoziazione, nonché la sospensione del pagamento delle prime due rate.

- Si determini l'importo delle rate del nuovo mutuo.

Soluzione
• Siamo in presenza di un mutuo con ammortamento italiano. Trattandosi di un mutuo decennale con rate trimestali, abbiamo in tutto

$$10 \text{ anni} = 10 \cdot 4 \text{ trimestri} = 40 \text{ trimestri},$$

in corrispondenza dei quali vengono pagate altrettante $n = 40$ rate. Dato l'importo mutuato $S = 110\,000$ euro, poiché le quote capitali sono costanti si ha

$$C_k = C = \frac{S}{n} = \frac{110\,000}{40} = 2\,750\,€$$

per $k = 1, 2, \ldots, n$. Poiché qualsiasi sia lo schema utilizzato per ammortizzare il debito, vale la relazione $I_1 = i \cdot D_0$, con ovviamente $D_0 = S$, abbiamo

$$I_1 = i_4 \cdot D_0,$$

da cui

$$i_4 = \frac{I_1}{D_0} = \frac{2\,006.91}{110\,000} \approx 0.0182446364.$$

Essendo le rate trimestrali, scriviamo correttamente i_4; da questo ricaviamo il tasso annuo equivalente

$$i = (1 + i_4)^4 - 1 = (1 + 0.018244)^4 - 1 \approx 0.075.$$

A questo punto siamo in grado di calcolare le quantità richieste. Per completare la seconda riga del piano dobbiamo calcolare

$$R_1 = C + I_1 = 2\,750 + 2\,006.91 = 4\,756.91\,€$$

e

$$D_1 = D_0 - C = 110\,000 - 2\,750 = 107\,250\,€.$$

Della terza riga vanno calcolate tutte le quantità a parte la quota capitale.

$$I_2 = i_4 \cdot D_1 = 0.018244 \cdot 107\,250 = 1\,956.74\,€,$$

$$R_2 = C + I_2 = 2\,750 + 1\,956.74 = 4\,706.74\,€$$

e

$$D_2 = D_1 - C = 107\,250 - 2\,750 = 104\,500\,€.$$

Per calcolare le quantità delle ultime due righe del piano possono essere utilizzate la formula ricorsiva per il debito residuo $D_k = \frac{n-k}{n} \cdot S$ (il quale va calcolato per la terzultima riga); dunque

$$D_{38} = \frac{40 - 38}{40} \cdot 110\,000 = 5\,500\,€.$$

Da questo ricaviamo

$$I_{39} = i_4 \cdot D_{38} = 0.018244 \cdot 5\,500 = 100.35\,€,$$

$$R_{39} = C + I_{39} = 2\,750 + 100.35 = 2\,850.35\,€$$

e

$$D_{39} = D_{38} - C = 5\,500 - 2\,750 = 2\,750\,€,$$

il cui importo conferma la condizione di chiusura ($D_{n-1} = C_n$). Dell'ultima riga dobbiamo calcolare solo quota interesse e rata (infatti $D_n = 0$)

$$I_{40} = i_4 \cdot D_{39} = 0.018244 \cdot 2\,750 = 50.17\,€,$$

$$R_{40} = C + I_{40} = 2\,750 + 50.17 = 2\,800.17\,€.$$

Di seguito i dati sono stati riassunti nel piano di ammortamento.

k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	–	–	–	110 000.00
1	4 756.91	2 750.00	2 006.91	107 250.00
2	4 706.74	2 750.00	1 956.74	104 500.00
...	...	...	...	...
39	2 850.35	2 750.00	100.35	2 750.00
40	2 800.17	2 750.00	50.17	0.00

• Per calcolare gli importi richiesti a seguito della rinegoziazione dobbiamo innanzitutto calcolare il debito resido dopo il pagamento della quattordicesima rata

$$D_{14} = \frac{40 - 14}{40} \cdot 110\,000 = 71\,500\,€.$$

Il nuovo debito residuo risulta pari a

$$\tilde{S} = D_{14} \cdot (1 + 0.0225) + 350 = 71\,500 \cdot (1 + 0.0225) + 350 = 73\,458.75\,€,$$

mentre il nuovo tasso d'interese annuo è uguale a

$$\tilde{i} = i \cdot (1 - 0.15) = 0.075 \cdot (1 - 0.15) = 0.06375.$$

Ad esso corrisponde il tasso trimestrale

$$\tilde{i}_4 = \left(1 + \tilde{i}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1 + 0.06375)^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 0.0155700701.$$

Poiché la quindicesima e la sedicesima rata vengono sospese, rimangano da pagare ancora $\tilde{n} = (40-14)-2 = 24$ rate. Nonostante ciò, continuano a maturare gli interessi anche in corrispondenza del quindicesimo e del sedicesimo periodo.

Possiamo ragionare come se iniziassimo un nuovo piano di ammortamento per il quale si deve determinare il valore del debito residuo alla fine del sedicesimo trimestre. A tal fine, si trova che gli interessi pagati sul debito residuo sono pari a

$$\tilde{I}_{15} = \tilde{i}_4 \cdot \tilde{S} = 0.015570 \cdot 73\,458.75 = 1\,143.76\,€\,,$$

alla quale corrisponde una quota capitale di

$$\tilde{C}_{15} = \tilde{R}_{15} - \tilde{I}_{15} = 0 - 1\,143.76 = -1\,143.76\,€.$$

Infine, il debito residuo risulta pari a

$$\tilde{D}_{15} = \tilde{S} - \tilde{C}_{15} = 73\,458.75 - (-1\,143.76) = 74\,602.51\,€.$$

Il trimestre successivo si ha

$$\tilde{I}_{16} = \tilde{i}_4 \cdot \tilde{D}_{15} = 0.015570 \cdot 74\,602.51 = 1\,161.57\,€$$

alla quale corrisponde una quota capitale di

$$\tilde{C}_{16} = \tilde{R}_{16} - \tilde{I}_{16} = 0 - 1\,161.57 = -1\,161.57\,€.$$

Infine

$$\tilde{D}_{16} = \tilde{D}_{15} - \tilde{C}_{16} = 74\,602.51 - (-1\,161.57) = 75\,764.07\,€.$$

Quindi, la sospensione della rate non è priva di effetti: il debito è coerentemente aumentato.

A questo punto, siamo in grado di calcolare l'importo della nuova rata. Passando da un mutuo con ammortamento italiano ad uno con ammortamento francese, risulta pari a, per $k = 17, 18, \ldots, n$,

$$\tilde{R}_k = \tilde{R} = \frac{\tilde{D}_{16}}{a_{\overline{\tilde{n}}|\tilde{i}_4}} = \frac{75\,764.07}{a_{\overline{24}|0.015570}} = 3\,807.54\,€.$$

Esercizio 2

Per l'acquisto di un capannone industriale sito in Italia, un imprenditore ha contratto con una società finanziaria inglese un mutuo in sterline britanniche per un importo equivalente a $125\,000$€ da rimborsare mediante 20 rate bimestrali costanti immediate posticipate al tasso del 7.5% annuo. Si sa che il tasso di cambio attuale euro/sterlina britannica è 1€ uguale a 0.8465£.

- Si compilino le prime tre e le ultime tre righe del piano di ammortamento in euro, indicando come sono stati svolti i calcoli.

Immediatamente dopo il pagamento della diciottesima rata si verifica una rivalutazione dell'euro rispetto alla sterlina britannica in base ad un tasso medio annuo costante dell' 1%.

- Si calcolino gli importi delle due rate in euro dopo la rivalutazione dell'euro.

Soluzione

• Dal momento che viene chiesto l'importo in euro di un mutuo il cui importo globale $S_€$ è anch'esso espresso in euro (e assunto il tasso di cambio euro/sterlina britannica costante nel tempo), a prescindere che la societè sia britannica (e che quindi effettivamente eroghi il mutuo in sterline), nessun cambio di valuta è richiesto. Dobbiamo solo calcolare il tasso bimestrale equivalente al tasso annuo $i = 7.5\%$, ossia

$$i_6 = (1+i)^{\frac{1}{6}} - 1 = (1+0.075)^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0.01212637909.$$

Dunque le rate espresse in euro sono pari a

$$R_{€,k} = R_€ = \frac{S_€}{a_{\overline{n}|i_6}} = \frac{125\,000}{a_{\overline{20}|0.012126}} = 7076.14€\,,$$

essendo queste costanti e posticipate (ammortamento francese). Dobbiamo inoltre calcolare la quota capitale, la quota interesse e il debito residuo

$$C_{€,k} = R_€ \cdot (1+i_6)^{-(n-k+1)}\,,$$

$$I_{€,k} = R_€ - C_{€,k}\,,$$

$$D_{€,k} = S_€ - \sum_{j=0}^{k} C_j = R_€ \cdot a_{\overline{n-k}|i_6}$$

per $k = 0, 1, 2$ (prime tre righe del piano di ammortamento) e $k = 18$, 19, 20 (ultime tre righe del piano di ammortamento). Per $k = 1$ [1]

$$C_{€,1} = 7076.14 \cdot (1 + 0.012126)^{-20} = 5\,560.34€,$$

$$I_{€,1} = 7076.14 - 5\,560.34 = 1\,515.80€,$$

$$D_{€,1} = 125\,000 - 5\,560.34 = 119\,439.66€.$$

Per $k = 2$

$$C_{€,2} = 7076.14 \cdot (1 + 0.012126)^{-19} = 5\,627.77€,$$

$$I_{€,2} = 7076.14 - 5\,627.77 = 1\,448.37€,$$

$$D_{€,2} = 125\,000 - (5\,560.34 + 5\,627.77) = 113\,811.89€.$$

Per $k = 18$

$$C_{€,18} = 7076.14 \cdot (1 + 0.012126)^{-3} = 6\,824.84€,$$

$$I_{€,18} = 7076.14 - 6\,824.84 = 251.30€,$$

[1] Per $k = 0$ non vi sono calcoli da svolgere in quanto l'unica quantità di rilievo è il debito residuo $D_{€,0} = S_€$.

$$D_{€,18} = 7076.14 \cdot a_{\overline{2}|0.012126} = 13\,898.95€.$$

Per $k = 19$

$$C_{€,19} = 7076.14 \cdot (1 + 0.012126)^{-2} = 6\,907.60€,$$

$$I_{€,19} = 7076.14 - 6\,907.60 = 168.54€,$$

$$D_{€,19} = 7076.14 \cdot a_{\overline{1}|0.012126} = 6\,919.36€.$$

Per $k = 20$

$$C_{€,20} = D_{€,19} = 6\,919.36€ \quad \text{(condizione di chiusura)},$$

$$I_{€,20} = 7076.14 - 6\,919.36 = 84.78€,$$

$$D_{€,20} = 0€ \quad \text{(condizione di chiusura)}.$$

Di seguito i dati sono stati riassunti in un'unica tabella.

k	$R_{€,k}$	$C_{€,k}$	$I_{€,k}$	$D_{€,k}$
0	–	–	–	125 000.00
1	7 076.14	5 560.34	1 515.80	119 439.66
2	7 076.14	5 627.77	1 448.37	113 811.89
...	...	...	...	...
18	7 076.14	6 824.84	251.30	13 898.95
19	7 076.14	6 907.60	168.54	6 919.36
20	7 076.14	6 919.36	84.78	0.00

• Se dalla diciottesima rata l'euro si apprezza rispetto alla sterlina britannica, significa che il gli importi delle rate in euro non possono essere calcolati al medesimo tasso annuo estero $i = 7.5\%$. Poiché la rivalutazione dell'euro rispetto alla sterlina è assunta dell'1% annuo, prima di ricalcolare l'importo delle rate dobbiamo calcolare il tasso di rivalutazione bimestrale

$$\alpha_6 = (1 + \alpha)^{\frac{1}{6}} - 1 = (1 + 0.01)^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0.001659764361.$$

Quindi prima della variazione del tasso abbiamo

$$S_k^{€/£} = 0.8465 \text{ £}/€,$$

per $k = 0, 1, \dots, 18$, ed immediatamente dopo

$$S_{19}^{€/£} = S_{18}^{€/£} \cdot (1 + \alpha_6) = 0.8465 \cdot (1 + 0.001659) \approx 0.8479049905 \text{ £}/€,$$

$$S_{20}^{€/£} = S_{18}^{€/£} \cdot (1 + \alpha_6)^2 = 0.8465 \cdot (1 + 0.001659)^2 \approx 0.8493123130 \text{ £}/€.$$

Per calcolare le rate in euro (ora non più costanti) risulta conveniente calcolare le rate in sterline (sempre costanti, essendo il mutuo contratto in sterline) partendo dal piano di ammortamento del punto, cioè precedente

$$R_{£} = R_{€} \cdot S_0^{€/£} = 7\,076.14\,€ \cdot 0.8465 \text{ £}/€ = 5989.95 \text{ £}.$$

Per trovare le ultime due rate in euro basta effettuare l'operazione inversa utilizzando i nuovi tassi di cambio, ovvero

$$R_{€,19} = \frac{R_{£}}{S_{19}^{€/£}} = \frac{5989.95 \text{ £}}{0.847904 \text{ £}/€} = 7064.41€.$$

$$R_{€,20} = \frac{R_{£}}{S_{20}^{€/£}} = \frac{5989.95 \text{ £}}{0.849312 \text{ £}/€} = 7052.71€.$$

Essendosi l'euro rivalutato rispetto alla sterlina britannica, correttamente gli importi delle rate in euro sono decrescenti (quindi il mutuo, se pagato in euro, costa meno).

Esercizio 3

Al fine di acquistare un appartamento, una coppia ha contratto con una banca un mutuo di $160\,000€$ da rimborsare in 20 anni mediante rate trimestrali, immediate e posticipate al tasso del 7.55% annuo. In particolare, le prime due di queste rate sono composte dalla sola quota interessi, cioè con quota capitale nulla, e le rimanenti sono con quota capitale non nulla e costante.

- Compilare le prime quattro righe del piano di ammortamento.
- Compilare le ultime due righe del piano di ammortamento.

Immediatamente dopo il pagamento della ventesima rata, la banca, su richiesta della coppia, acconsente alla rinegoziazione del mutuo alle seguenti condizioni, rimanendo invariate le altre: sospensione del pagamento delle tre rate successive; riduzione del tasso annuo dello 0.75%; aumento del debito residuo di una penale dell' 1.5% e di 350€ per costi di rinegoziazione; rate trimestrali, costanti, immediate e posticipate di importo uguale a quello dell'ultima rata del vecchio mutuo.

- Determinare il numero minimo di rate necessarie per estinguere il nuovo mutuo e discutere la convenienza della rinegoziazione.
- Determinare di quanto l'importo dell'ultima rata è eventualmente maggiore dell'ultimo debito residuo.

Soluzione

• Siamo in presenza di un mutuo ventennale di importo $S = 160\,000$€ a rate posticipate trimestrali. Innanzitutto, quindi calcoliamo il tasso trimestrale equivalente al tasso anno $i = 7.55\%$

$$i_4 = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1+0.0755)^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 0.01836298098.$$

Prima di procedere ai calcoli dei singoli importi, bisogna inoltre convertire la durata in anni nella durata coerente con la frequenza di pagamento delle rate, ossia

$$20 \text{ anni} = 20 \cdot 4 \text{ trimestri} = 80 \text{ trimestri}.$$

Quindi la coppia pagarà per 20 anni un totale di $n = 80$ rate. Infine, la particolarità del mutuo sta nel modo in cui le quote capitale sono definite, ossia

$$C_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 1,2 \\ C & \text{se } k = 3,4,\ldots,n. \end{cases}$$

Dato che le prime due rate non vengono pagate si ha, oltre ovviamente alla condizione $D_0 = S$,

$$D_0 = D_1 = D_2,$$

il che equivale a dire che le prime due rate (avendo quota capitale nulla) non vanno ad abbattere il debito iniziale. Ciò premesso, passiamo a calcolare gli importi richiesti

$$I_1 = i_4 \cdot D_0 = 0.018362 \cdot 160\,000 = 2\,938.08€$$

e

$$I_2 = i_4 \cdot D_1 = 0.018362 \cdot 160\,000 = 2\,938.08€.$$

Essendo $C_1 = C_2 = 0$, segue $R_1 = I_1$ e $R_2 = I_2$. Dalla terza rata in poi il finanziamento può essere considerato come un nuovo mutuo, in cui l'importo mutuato è $S = D_2$, di $n^* = n - 2 = 78$ rate posticipate a quota capitale costante (ammortamento italiano). Abbiamo quindi, per $k = 3, 4, \ldots, n$

$$C_k = C = \frac{D_2}{n^*} = \frac{160\,000}{78} = 2\,051.28€.$$

Poiché dobbiamo completare la quarta riga del piano di ammortamento, dobbiamo calcolare

$$I_3 = i_4 \cdot D_2 = 0.018362 \cdot 160\,000 = 2\,938.08€,$$

$$R_3 = C + I_3 = 2\,051.28 + 2\,938.08 = 4\,989.36€,$$

e

$$D_3 = D_2 - C = 160\,000 - 2\,051.28 = 157\,948.72€,$$

Di seguito i dati sono stati riassunti in un'unica tabella.

k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	–	–	–	160 000.00
1	2 938.08	0.00	2 938.08	160 000.00
2	2 938.08	0.00	2 938.08	160 000.00
3	4 989.36	2 051.28	2 938.08	157 948.72
...	...	...	...	...