Prefazione

Questo volume nasce dall'esperienza delle lezioni tenute per i corsi di Economia per molti anni presso l'Università di Udine. Intende presentare gli argomenti principali necessari agli studenti per affrontare i corsi successivi che utilizzeranno il linguaggio e la strumentazione matematica sia a livello base che avanzato.

Il testo comprende le parti essenziali di teoria. Ogni argomento è corredato da molteplici esempi per chiarire i risultati più importanti e acquisire le competenze per saperli utilizzare in contesti diversi. Presenta altresì, alla fine di ogni capitolo, molti esercizi per verificare la preparazione raggiunta. Vengono proposte numerose applicazioni, sia riferite al settore economico e finanziario che ad altri ambiti, cercando in ogni caso di utilizzare conoscenze note allo studente in entrata al primo anno di università.

In base al numero di crediti attribuiti al corso di Matematica Generale il testo può essere ridotto nello studio. Il capitolo sul calcolo combinatorio, le appendici sui numeri complessi, sugli ordinamenti e sulle serie, sono quasi completamente autonomi rispetto al resto e quindi possono non far parte del programma in base alle esigenze e ai tempi del corso. L'ultimo capitolo, quello sulle funzioni di due variabili, può essere analizzato in duplice lettura: una lettura completa (certamente non agevole visto la vastità e le difficoltà dell'argomento) oppure una lettura limitata all'utilizzo della sola strumentazione necessaria per i corsi di Macroeconomia, Microeconomia e Statistica, tralasciando le motivazioni dei risultati più complessi.

Ho cercato di ridurre al minimo i prerequisiti non contenuti in questo testo, che si limitano alla parte su equazioni e disequazioni, alla geometria analitica e alla trigonometria. Un possibile testo per poter integrare, per chi ne avesse necessità, tali perequisiti è il Gaudenzi-Spangaro [1]. Per facilitare lo studio a chi non ritiene di possedere questi prerequisiti, i due testi utilizzano le stesse notazioni e la stessa metodologia. La parte su funzioni esponenziali e logaritmiche, imprescindibile nei corsi di Matematica Generale per Economia, ricalca in parte quel testo per poi completare gli argomenti e presentare diversi esempi di applicazioni.

Lo studio della matematica per essere efficace richiede interesse e passione, qualità necessarie per entrare in questo magnifico edificio teorico creato dall'uomo nel corso dei secoli. In genere maggiore è l'approfondimento della materia, maggiore risulta l'attrazione che essa è capace di suscitare. Spero di essere riu-

[1] M. Gaudenzi-A. Spangaro, *Precorso di matematica per economia*, Edizioni Forum, Udine, 2019.

scito in questo testo, almeno in parte, a infondere la curiosità e l'interesse che ho sempre cercato di trasmettere nelle mie lezioni.

Capitolo 1

Insiemi, numeri reali e funzioni

1.1 Elementi di insiemistica

1.1.1 Insiemi

La teoria degli insiemi fornisce il linguaggio base con cui costruire tutti i concetti dei corsi di Matematica Generale. Le notazioni e i presupposti che vedremo in questa prima sezione verranno utilizzati in tutto il testo e permetteranno di esprimere in modo più preciso e sintetico i risultati che andremo ad analizzare nei vari capitoli.

Le nozioni d'*insieme*, di *elemento* e di *appartenenza* verranno considerate come primitive, quindi non ne verrà data una definizione. Tramite queste nozioni costruiremo le altre necessarie per la nostra trattazione.

In pratica per insieme intendiamo una famiglia o collezione o classe di oggetti che verranno detti elementi dell'insieme considerato.

Nel seguito, per maggiore chiarezza, con lettere maiuscole indicheremo insiemi e con lettere minuscole gli elementi. Il simbolo

$$\in$$

verrà usato per indicare l'appartenenza di un oggetto ad un dato insieme. Scriveremo "$x \in E$" e leggeremo "x è un elemento dell'insieme E" oppure "x appartiene ad E". Il simbolo

$$\notin$$

indica la negazione dell'appartenenza, scriveremo "$x \notin E$" e leggeremo "x non è un elemento dell'insieme E" oppure "x non appartiene ad E".

Un insieme è individuato dai suoi elementi. Per elencare gli elementi di un insieme useremo notazioni del tipo:

$$E = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$F = \{a, e, i, o, u\}$$

$$G = \{2, 4, 6, 8, ...\}$$

$$H = \{Roma, Parigi, Tokio\}$$

Quindi gli elementi di un insieme possono essere elencati tra due parentesi graffe e separati da una virgola.

Il linguaggio matematico deve essere sintetico e preciso, attenzione quindi ad usare sempre i simboli appropriati: $\{2, 5\}$ indica un insieme costituito dai numeri 2 e 5, invece vedremo successivamente che $(2, 5)$ indica un punto del piano cartesiano mentre $[2, 5]$ indica un intervallo di numeri reali. Il tipo di parentesi cambia completamente il significato e anche il contesto: $\{2, 5\}$ è un insieme, $(2, 5)$ è un elemento non un insieme, $[2, 5]$ è ancora un insieme ma esso contiene infiniti elementi (tutti i numeri reali compresi tra 2 e 5).

Alcuni insiemi che si presentano molto frequentemente verranno indicati con simboli particolari, come

N l'insieme dei numeri naturali, cioè $\{1, 2, 3, ...\}$

Z l'insieme dei numeri interi, cioè $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Q l'insieme dei numeri razionali (l'insieme di tutte le possibili frazioni come vedremo tra breve)

R l'insieme dei numeri reali (insieme che richiede una definizione più complicata e che vedremo in una sezione apposita)

C l'insieme dei numeri complessi (che vedremo anch'esso in una sezione apposita).

Un altro modo per indicare gli insiemi (in genere più preciso) lo si ha precisando una proprietà che verificano tutti e soli gli elementi dell'insieme. Ad esempio nel caso degli insiemi E, F, G considerati in precedenza possiamo usare le notazioni

$$E = \{x : x \in \mathbf{N} \text{ e } x \leq 4\} \text{ oppure } E = \{x \in \mathbf{N} : \ x \leq 4\}$$

$$F = \{x : x \text{ è una vocale } \}$$

$$G = \{x : x \in \mathbf{N} \text{ ed } x \ \text{ è pari}\} \text{ oppure } G = \{x \in \mathbf{N} : \text{ x è pari.}\}$$

Il simbolo (due punti)

" : " si legge "tale che"

Il simbolo " | " (tratto verticale) ha lo stesso significato, cioè sempre "tale che". Quindi la notazione usata per l'insieme E significa che tale insieme è costituito da ogni elemento x tale che x è un elemento dei numeri naturali $\mathbf{N}$ e x è minore o uguale a 4. I numeri naturali, così come verranno considerati in questo testo, partono da 1, pertanto $E = \{1,2,3,4\}$. Spesso si omette "x :", allora E si scrive: $E = \{x \in \mathbf{N} : \ x \leq 4\}$ (oppure $E = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 4\}$), che si legge "tutti gli $x \in \mathbf{N}$ tali che $x \leq 4$", abbreviando la definizione di E pur mantenendo la precisione.

Si osserva che in altri testi i numeri naturali includono anche lo zero, qui si è preferita la scelta che esclude lo zero. Si tratta solo di una scelta che però deve essere chiaramente espressa per evitare confusione nel seguito. In questo testo 0 non fa parte dell'insieme dei numeri naturali.

Con la nuova notazione insiemistica possiamo precisare come è definito l'insieme dei numeri razionali $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \{x : \ x = \frac{p}{q} \text{ con } p \in \mathbf{Z}, \ q \in \mathbf{N}\}$$

Dunque $\mathbf{Q}$ è l'insieme di tutte le possibili frazioni dove il numeratore è un numero intero e il denominatore è un numero naturale (che, come già precisato, non può essere nullo).
Quindi sono numeri razionali: $\frac{7}{3}$, $\frac{-4}{9} = -\frac{4}{9}$, $\frac{-5}{15} = -\frac{5}{15} = -\frac{1}{3}$, $\frac{4}{1} = 4$. Come mostra questo ultimo esempio ogni numero intero positivo, negativo o nullo si può vedere come una frazione con denominatore pari a 1 e quindi i numeri interi sono anche numeri razionali.

Supporremo l'esistenza di un unico insieme privo di elementi. Esso verrà detto l'*insieme vuoto* e useremo il simbolo

$$\varnothing.$$

Due insiemi A e B si dicono *uguali* se hanno gli stessi elementi, se cioè ogni elemento che appartiene ad A appartiene anche a B e ogni elemento che appartiene a B appartiene anche ad A. Se A e B sono uguali scriveremo

$$A = B$$

(altrimenti scriveremo $A \neq B$).

Si osservi che non è importante l'ordine con il quale gli elementi sono elencati: $\{1,3\}$ e $\{3,1\}$ sono lo stesso insieme. Nel piano cartesiano i punti $(1,3)$ e $(3,1)$ sono diversi, ma qui non stiamo parlando di punti del piano (che vedremo successivamente) ma di due insiemi. Di nuovo rimarchiamo che il contesto e i simboli usati sono diversi.

□ **Esempio 1.1** *Si considerino* $A = \{3,2,1,4\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{2,1,4\}$, $D = \{x \in \mathbf{N} : x^2 = 3\}$.

Si ha: $A = B$, $A \neq C$, $B \neq C$, $D = \emptyset$.

♣ **Definizione 1.2** *Se ogni elemento dell'insieme A è anche un elemento dell'insieme B diremo che A è un* <u>sottoinsieme</u> *di B (oppure che A è* <u>incluso</u> *in B, oppure che A è* <u>contenuto</u> *in B) e scriveremo*

$$A \subset B$$

Nota 1.3 *Dalla definizione data si ha che $A \subset A$ qualsiasi sia l'insieme A.*

Nota 1.4 *Si assume che $\emptyset \subset A$ per ogni insieme A (cioè che l'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme).*

♣ **Definizione 1.5** *Se $A \subset B$ e $A \neq B$ diremo che A è un* <u>sottoinsieme proprio</u> *di B e scriveremo*

$$A \subsetneq B.$$

□ **Esempio 1.6** *Si considerino gli insiemi:*

$$A = \{x \in \mathbf{N} : \ x \text{ è pari}\},$$

$$B = \{2,4,8,12\},$$

$$C = \{1,2,4,8,12\}.$$

Si ha $B \subset A$ e anche $B \subsetneq A$, $B \subset C$ e anche $B \subsetneq C$, mentre $C \not\subset B$. Nel caso di:

$$D = \{x : x \text{ è la capitale di uno stato europeo}\},$$

$$E = \{Parigi,\ Roma,\ Vienna\},$$

$$F = \{Parigi, Roma, Firenze, Vienna\},$$

si ha: $E \subset D$ e anche $E \subsetneq F$, mentre $F \not\subset D$.

Nota 1.7 *Dati due insiemi A e B, se $B \subset A$ e $A \subset B$ allora ogni elemento di A è anche un elemento di B e viceversa, quindi $A = B$.*

Possiamo considerare anche insiemi i cui elementi siano a loro volta insiemi come ad esempio:

$$A = \{\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}\},$$

$$B = \{\emptyset\},$$

$$C = \{\{1,2\},\{2,6,7\},\{1\}\}.$$

Osserviamo che $B \neq \varnothing$, infatti B possiede un elemento (l'insieme vuoto) dunque non è vuoto. Si osservi ancora che $2 \notin C$ e inoltre posto $D = \{1,2\}$, si ha $D \not\subset C$, infatti $1 \in D$ ma $1 \notin C$. Però $D \in C$.

♣ **Definizione 1.8** *Sia A un insieme. Con $P(A)$ indichiamo l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A.*

□ **Esempio 1.9** *Calcoliamo tutti i sottoinsiemi degli insiemi costituiti dai primi numeri naturali, più precisamente:*

$$I_1 = \{1\}, \qquad P(I_1) = \{\varnothing, \{1\}\}$$

$$I_2 = \{1,2\}, \qquad P(I_2) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\},$$

$$I_3 = \{1,2,3\}$$

$$P(I_3) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Si può verificare che se A possiede n elementi, $P(A)$ possiede 2^n elementi. Quindi i sottoinsiemi di $I_{20} = \{1,2,3,...,19,20\}$ sono ben $2^{20} = 1048576$.

1.1.2 Operazioni sui sottoinsiemi

Nel seguito indicheremo con $A, B, C, ...$ sottoinsiemi di uno stesso insieme U (detto insieme universo).

♣ **Definizione 1.10** *L'* unione *di due insiemi A e B è l'insieme costituito da tutti gli elementi che appartengono ad A oppure a B oppure ad entrambi. L'unione di A e B verrà indicata col simbolo $A \cup B$.*

Quindi $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$.

♣ **Definizione 1.11** *L'* intersezione *di due insiemi A e B è l'insieme costituito da tutti gli elementi che appartengono contemporaneamente ad A e a B. L'intersezione di A e B verrà indicata col simbolo $A \cap B$.*

Quindi $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Per visualizzare le due operazioni introdotte possiamo utilizziamo i cosiddetti diagrammi di Venn.

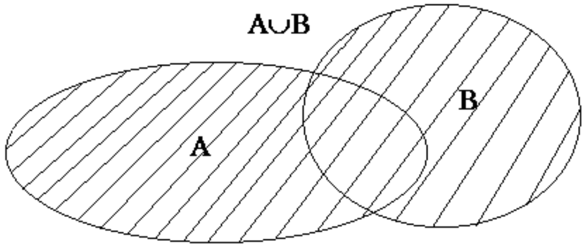


Figura 1.1: Unione di due insiemi

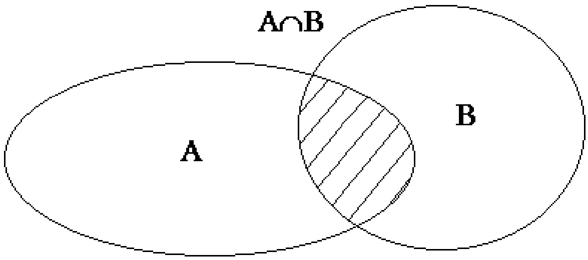


Figura 1.2: Intersezione di due insiemi

□ **Esempio 1.12** *Siano:* $A = \{2, 3, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 8\}$. *Allora:*
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$,
$A \cap B = \{2, 3\}$.

♣ **Definizione 1.13** *La* <u>differenza</u> *di due insiemi A e B è l'insieme costituito da tutti gli elementi che appartengono ad A ma non appartengono a B. La differenza di A e B verrà indicata col simbolo $A \setminus B$.*

Quindi $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

□ **Esempio 1.14** $A = \{2, 3, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 8\}$,
$A \setminus B = \{7, 9\}$, $B \setminus A = \{1, 4, 8\}$.

♣ **Definizione 1.15** *Dato un sottoinsieme A di U si dice* <u>complementare</u> *di A (rispetto ad U) l'insieme $U \setminus A$. Il complementare verrà denotato con il simbolo ${}^cA$ (oppure con $C(A)$).*

Quindi ${}^cA = \{x : x \in U \text{ e } x \notin A\}$.

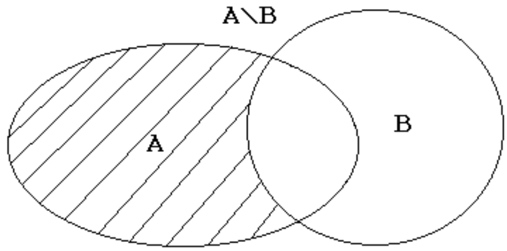


Figura 1.3: Differenza tra due insiemi

Si osservi che mentre l'unione, l'intersezione e la differenza non dipendono dall'insieme di partenza U, il complementare dipende strettamente da U.

□ **Esempio 1.16** *Sia* $U = \mathbf{N}$, $A = \{1, 3, 5, ...\}$ *(cioè l'insieme dei numeri dispari).*
${}^cA = \{2, 4, 6, ...\}$ *(cioè l'insieme dei numeri pari).*
Nel caso invece $U = \mathbf{Z}$ *si ha* ${}^cA = \{..., -3, -2, -1, 0, 2, 4, 6, ...\}$.

□ **Esempio 1.17** *Sia* $U = \mathbf{R}$ *ed* $A = \{x \in \mathbf{R} : 2 < x < 3\}$. *Si ha:*
${}^cA = \{x \in \mathbf{R} : x \leq 2\} \cup \{x \in \mathbf{R} : x \geq 3\}$.

□ **Esempio 1.18** *Verificare che* $A \setminus B = A \cap {}^cB$.

Per verificare questa uguaglianza insiemistica possiamo provare la doppia inclusione, cioè che ogni elemento di $A \setminus B$ *è anche un elemento di* $A \cap^c B$ *e viceversa. Avremo così provato che* $A \setminus B \subset A \cap^c B$ *e che* $A \cap^c B \subset A \setminus B$, *dunque per la Nota 1.7 si avrà che i due insiemi coincidono.*

Verifichiamo che $A \setminus B \subset A \cap^c B$. *A tal fine si consideri un qualsiasi elemento* $x \in A \setminus B$. *Per definizione si ha che* $x \in A$ *e* $x \notin B$. *Dunque* $x \in A$ *e* $x \in^c B$, *e così* $x \in A \cap^c B$.

Verifichiamo ora che $A \cap^c B \subset A \setminus B$. *A tal fine prendiamo un qualsiasi elemento* $x \in A \cap^c B$. *Per definizione si ha che* $x \in A$ *e* $x \in^c B$. *Dunque* $x \in A$ *e* $x \notin B$, *pertanto* $x \in A \setminus B$.

L'uguaglianza appena dimostrata è semplice e intuitiva, la proposizione seguente invece ci fornisce due uguaglianze non così intuitive. Questa stabilisce che il complementare dell'unione è uguale all'intersezione dei complementari, mentre il complementare dell'intersezione è uguale all'unione dei complementari.

Proposizione 1.19 *(Leggi di De Morgan) Dati due sottoinsiemi* A *e* B *dell'insieme universo* U *si ha:*

$$ {}^c(A \cup B) = {}^cA \cap^c B $$
$$ {}^c(A \cap B) = {}^cA \cup^c B $$

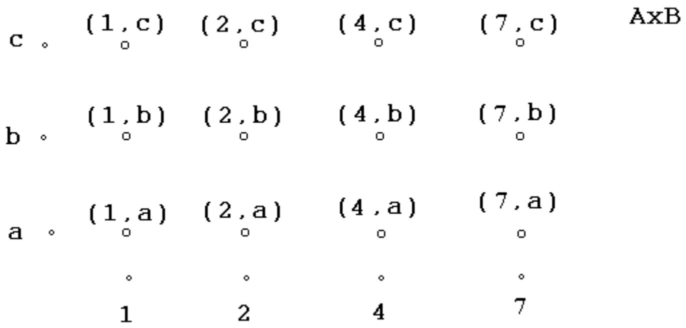
Dimostrazione. Proveremo solo la prima relazione ${}^c(A \cup B) = {}^cA \cap {}^cB$, lasciamo al lettore la verifica della seconda.

Come nell'esempio precedente proviamo la doppia inclusione.
Sia $x \in {}^c(A \cup B)$, dunque $x \notin A \cup B$. Ciò significa che x non appartiene né ad A né a B, dunque $x \notin A$ e $x \notin B$. Si ha contemporaneamente $x \in {}^cA$ e $x \in {}^cB$ dunque $x \in {}^cA \cap {}^cB$.

Viceversa sia $x \in {}^cA \cap {}^cB$. Si ha per la definizione d'intersezione: $x \in {}^cA$ e $x \in {}^cB$, dunque $x \notin A$ e $x \notin B$. Possiamo concludere che $x \notin A \cup B$ dunque $x \in {}^c(A \cup B)$. ◊

♣ **Definizione 1.20** *Chiamiamo* prodotto cartesiano *di due dati insiemi A e B l'insieme costituito da tutte le coppie ordinate (x, y), essendo $x \in A$ e $y \in B$. Il prodotto cartesiano verrà indicato con il simbolo $A \times B$.*

□ **Esempio 1.21** *Siano* $A = \{1, 2, 4, 7\}$, $B = \{a, b, c\}$. *Si ha:* $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (4, a), (4, b), (4, c), (7, a), (7, b), (7, c)\}$.



□ **Esempio 1.22** *Sia* $A = \mathbf{N}$, $B = \mathbf{R}$, $A \times B$ *sarà costituito da tutte le coppie di numeri reali in cui il primo elemento è un numero naturale.*

♣ **Definizione 1.23** *Dato un insieme finito A il numero degli elementi di A si dice la cardinalità di A e si indica col simbolo $\sharp(A)$.*

Si noti che se A e B sono insiemi finiti allora:

$$\sharp(A \times B) = \sharp(A) \cdot \sharp(B), \qquad \sharp(A \cup B) \leq \sharp(A) + \sharp(B).$$

È facile rendersi conto che il numero degli elementi di $A \cup B$ potrebbe essere minore della somma del numero degli elementi di A e B, infatti se A e B hanno elementi in comune considerando $\sharp(A) + \sharp(B)$ questi elementi vengono contati 2 volte. Per ottenere il numero esatto di elementi di $A \cup B$ occorre quindi sommare il numero di elementi di A e di B e togliere il numero di elementi in comune:

$$\sharp(A \cup B) = \sharp(A) + \sharp(B) - \sharp(A \cap B). \tag{1.1}$$

□ **Esempio 1.24** In una classe tutti gli studenti studiano almeno una lingua tra inglese ed francese. 18 studiano inglese, 9 francese. 6 studenti studiano sia inglese che francese. Quanti sono gli studenti della classe?

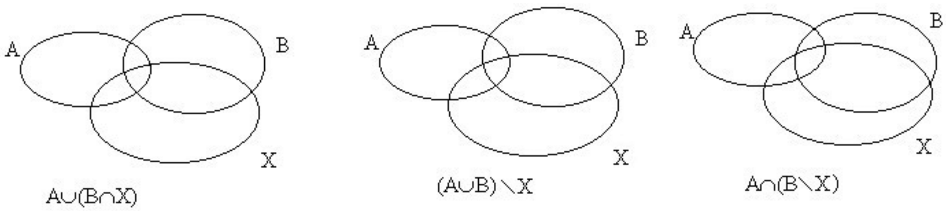
Indichiamo con C l'insieme degli studenti della classe, con I l'insieme degli studenti che studiano inglese e con F l'insieme degli studenti che studiano francese. Si ha: $\sharp(C) = \sharp(I \cup F) = \sharp(I) + \sharp(F) - \sharp(I \cap F) = 18 + 9 - 6 = 21$.

La relazione (1.1) si può estendere al caso di più insiemi. Nel caso di 3 insiemi:

$$\sharp(A \cup B \cup C) = \sharp(A) + \sharp(B) + \sharp(C) - \sharp(A \cap B) - \sharp(A \cap C) - \sharp(B \cap C) + \sharp(A \cap B \cap C). \tag{1.2}$$

Esercizi

1. Siano $U = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, d\}$, $B = \{b, d, e\}$.
   Calcolare: $A \cup B$, $B \cap A$, ${}^cB$, $B \setminus A$, ${}^cA \cap B$, $A \cup^c B$, ${}^cB \setminus^c A$, ${}^c(B \cap A)$.
2. Disegnare in ogni diagramma di Venn l'insieme sottoindicato:



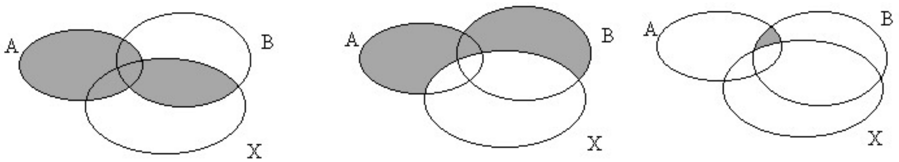
3. Sia $U = \mathbf{R}$. Posto $A = \{x \in \mathbf{R} : -2 < x \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 6\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} : -1 < x < 6\}$, determinare:
   $A \cup B$, $A \cap B$, $C \cup B$, $A \cap C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$, ${}^cA$, ${}^cB$.
Calcolare poi $(A \cup B) \cap C$ e verificare la validità della proprietà distributiva delle operazioni insiemistiche, cioè $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
4. Siano A e B due insiemi.
   4a. Provare che: ${}^cA \setminus^c B = B \setminus A$
   4b. Provare che se $B \supset A$ allora $A \cup (B \setminus A) = B$.
5. In un gruppo di ragazzi tutti praticano almeno uno sport tra calcio e basket. 10 di essi giocano a calcio, 14 giocano a basket, inoltre 7 giocano sia a basket che a calcio. Quanti sono i ragazzi?

6. In un gruppo di 29 ragazzi tutti praticano almeno uno sport tra calcio, basket e pallavolo. 19 di essi giocano a calcio, 16 a basket, 11 a pallavolo. Inoltre 10 giocano sia a basket che a calcio, 5 giocano sia a calcio che a pallavolo e solo 3 praticano tutti e tre gli sports. Quanti sono i ragazzi che giocano sia a basket che a pallavolo?

Soluzioni

1. $A \cup B = \{a, b, d, e\}$. $B \cap A = \{b, d\}$. ${}^cB = \{a, c\}$. $B \setminus A = \{e\}$. ${}^cA \cap B = \{e\}$. $A \cup^c B = \{a, b, c, d\}$. ${}^cB \setminus^c A = \{a\}$. ${}^c(B \cap A) = \{a, c, e\}$.

2.



$A\cup(B\cap X)$ $(A\cup B)\setminus X$ $A\cap(B\setminus X)$

3. $A \cup B =]-2, 6]$. $A \cap B = \{0\}$. $C \cup B =]-1, 6]$. $A \cap C =]-1, 0]$, $A \setminus B =]-2, 0]$. $A \setminus C =]-2, -1]$. ${}^cA =]-\infty, -2] \cup]0, +\infty[$. ${}^cB =]-\infty, 0[\cup]6, +\infty[$.
$(A \cup B) \cap C = C$. $A \cap C =]-1, 0]$. $B \cap C = [0, 6[$. $(A \cap C) \cup (B \cap C) =]-1, 6[$.

4a. Se $x \in^c A \setminus^c B$ allora $x \in^c A$ e $x \notin^c B$, dunque $x \in^c A$ e $x \in B$, così $x \in B \setminus A$, cioè ${}^cA \setminus^c B \subset B \setminus A$. Viceversa se $x \in B \setminus A$ allora $x \in B$ e $x \notin A$, quindi $x \notin^c B$ e $x \in^c A$ e così $x \in^c A \setminus^c B$. Si ha così $B \setminus A \subset^c A \setminus^c B$. Le due relazioni: ${}^cA \setminus^c B \subset B \setminus A$, $B \setminus A \subset^c A \setminus^c B$ implicano ${}^cA \setminus^c B = B \setminus A$.

4b. Se $x \in A \cup (B \setminus A)$ allora o $x \in A$ oppure $x \in B$. Poiché $A \subset B$ in entrambi i casi $x \in B$, quindi $A \cup (B \setminus A) \subset B$. Viceversa supponiamo che $x \in B$. Se $x \in A$ allora $x \in A \cup (B \setminus A)$, se invece $x \notin A$ allora $x \in B \setminus A$, dunque $x \in A \cup (B \setminus A)$. Quindi $B \subset A \cup (B \setminus A)$.

5. I ragazzi sono 17.

6. Applicando la formula (1.2) si ha che vi sono 5 ragazzi che giocano sia a basket che a pallavolo.