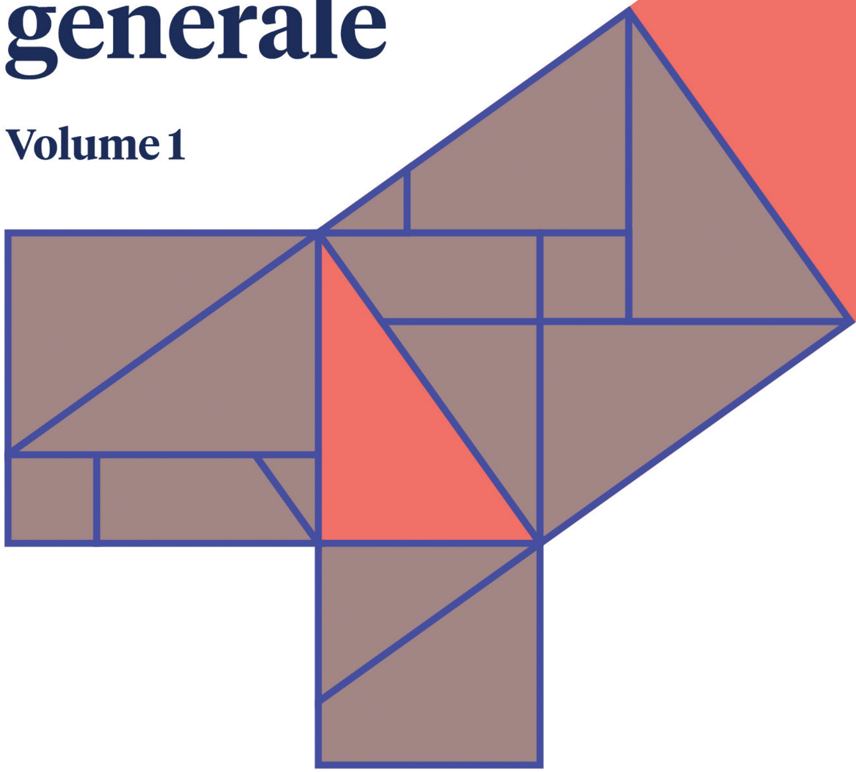
Alfio Giarlotta

Esercizi di Matematica generale

Volume 1



SECONDA EDIZIONE

Giappichelli

Prefazione

Consci del fatto che il lettore – soprattutto qualora sia uno studente concentrato sul mero superamento dell'esame di Matematica Generale – si sofferma raramente più di qualche minuto sulla Prefazione di un libro, saremo stringati e schematici.

Contenuto

Questo è il primo volume di una serie di *Esercizi di Matematica Generale*. I problemi presenti in questo libro sono tratti – con modifiche ed aggiunte, spesso sostanziali – dai compiti di esame di Matematica Generale somministrati nel decennio 2010-2019 agli studenti del Corso di Laurea in Economia Aziendale, Dipartimento di Economia e Impresa, Università degli Studi di Catania.

Questo volume consta di venti capitoli, ove ciascun capitolo è interamente dedicato ad un compito d'esame. I venti capitoli del libro sono, nell'ordine, così articolati:

- quindici compiti d'esame, con gli svolgimenti completi e dettagliati;
- cinque compiti d'esame, senza gli svolgimenti (che sono demandati al lettore) ma con le risposte presentate in Appendice.

Obiettivo

Questo libro intende fornire agli studenti un ausilio per il superamento dell'esame di Matematica Generale. A tal fine, lo svolgimento degli esercizi è inusualmente pedissequo, per consentire al lettore di cogliere la metodologia di risoluzione senza doversi preoccupare dei calcoli. Inoltre, alcuni esercizi – soprattutto negli ultimi capitoli – costituiscono un'occasione per presentare in un modo alternativo importanti aspetti della teoria.

Struttura

Ciascun capitolo/compito d'esame consta di dodici quesiti, di cui sei formano la Parte A e sei la Parte B. Lo schema utilizzato per ciascuno dei dodici esercizi è quello dei quesiti con risposte a scelta multipla (5 risposte possibili, di cui soltanto una è corretta).

I sei quesiti di **Parte A** vertono su una serie di argomenti preliminari, che sono di notevole importanza nel processo formativo di uno studente che intenda perseguire lo studio di discipline economiche mediante strumenti di carattere quantitativo. Tali argomenti sono i seguenti:

1. richiami di algebra elementare (logaritmi, potenze, equazioni, etc.);
2. elementi di logica e tavole di verità;
3. insiemistica, funzioni, cardinalità e relazioni binarie;
4. rette nel piano e quesiti di carattere geometrico;
5. matrici (proprietà, rango, determinante, etc.);
6. sistemi lineari (parametrici e non parametrici);
7. calcolo combinatorio;
8. insiemi numerici;
9. cenni di strutture algebriche (gruppi, anelli, corpi e campi).

I sei quesiti di **Parte B** vertono su vari aspetti connessi allo studio delle funzioni reali di una variabile reale, ossia:

1. disequazioni (razionali fratte, irrazionali, esponenziali, con valore assoluto, etc.);
2. limiti e forme indeterminate;
3. continuità e derivabilità di una funzione;
4. calcolo differenziale e sue applicazioni;
5. studio completo di una funzione reale di una variabile reale;
6. lettura del grafico di una funzione;
7. funzioni definite da più leggi;
8. integrali indefiniti;
9. integrali definiti e calcolo di aree.

I sei quesiti di Parte A sono, a loro volta, suddivisi in tre gruppi di difficoltà crescente: **A.1** (3 esercizi), **A.2** (2 esercizi) e **A.3** (1 esercizio).[1]

- **Parte A.1**: i tre quesiti di questa parte sono in genere i più semplici e non richiedono molti calcoli; nella maggioranza dei casi, per la loro risoluzione è sufficiente la mera applicazione delle definizioni e delle proprietà note.

[1] Naturalmente, in sede di valutazione dell'elaborato scritto, il punteggio attribuito agli esercizi di Parte A.3 è maggiore di quello attribuito agli esercizi di Parte A.2, che a sua volta è maggiore di quello attribuito agli esercizi di Parte A.1. Al momento in cui scriviamo, a ciascun esercizio di Parte A.1 sono attribuiti 4 punti nel caso di risposta corretta (0 nel caso di assenza di risposta, -1 nel caso di risposta sbagliata); a ciascun esercizio di Parte A.2 sono attribuiti 8 punti nel caso di risposta corretta (0 nel caso di assenza di risposta, -2 nel caso di risposta sbagliata); all'unico esercizio di Parte A.3 sono attribuiti 12 punti nel caso di risposta corretta (0 nel caso di assenza di risposta, -3 nel caso di risposta sbagliata).

- **Parte A.2**: i due quesiti di questa parte sono leggermente più complessi e usualmente richiedono uno svolgimento un po' più lungo e articolato.

- **Parte A.3**: l'unico quesito di questa parte è riservato agli studenti che vogliano cimentarsi nella risoluzione di un problema che richiede ragionamenti più profondi e/o una conoscenza sistematica della teoria.

In modo assolutamente simmetrico, i sei esercizi di Parte B sono divisi in tre gruppi di difficoltà crescente: **B.1** (3 esercizi), **B.2** (2 esercizi) e **B.3** (1 esercizio).[2]

Suggerimenti per la lettura

Nel tentativo di conciliare rigore e agilità espositiva, commetteremo a volte dei leggeri abusi terminologici: ad esempio, parleremo indifferentemente di 'area di un triangolo' e 'valore dell'area di un triangolo', oppure 'punto di flesso di una funzione' e 'punto di flesso per il grafico di una funzione', etc. La ragione di questa lieve concessione all'imprecisione è il tentativo di non appesantire eccessivamente la trattazione con un rigore formale che renderebbe alcune formulazioni poco duttili e comprensibili.

Di seguito elenchiamo alcuni suggerimenti che il lettore è invitato a seguire al fine di massimizzare l'utilità derivante dallo studio di questo volume.

Nozioni Teoriche. Non ci stancheremo mai di ripetere ciò che è da tutti i docenti ritenuto ovvio: *È oltremodo pernicioso cimentarsi nel tentativo di risolvere i quesiti d'esame in assenza di un'adeguata preparazione teorica!* L'esame scritto di Matematica Generale non è indipendente da quello orale – come purtroppo erroneamente ritengono tanti studenti, i quali si preparano esclusivamente per la prova scritta, lasciando pochissimo tempo per la preparazione della prova orale; una sorta di preparazione a 'compartimenti stagni'... Al contrario, l'esame scritto è indissolubilmente legato all'esame orale. Pertanto, consigliamo vivamente al lettore di assicurarsi che abbia capito e maturato a sufficienza tutte le nozioni teoriche utilizzate negli esercizi. Nella nostra esperienza di docenti, abbiamo invero riscontrato che, in assenza di un'adeguata preparazione teorica, lo studente tipicamente incorre in errori sistematici di risoluzione, spesso connessi ad una semplice 'ε-modifica' della struttura del problema.

Risoluzioni degli Esercizi. I primi quindici capitoli sono comprensivi di un accurato – a volte financo prolisso – svolgimento dei dodici esercizi a risposta multipla in esso contenuti. Naturalmente, il lettore è invitato a rispondere ai quesiti di ciascun compito senza alcun ausilio, evitando di consultare preventivamente le soluzioni e rispettando precisi vincoli di tempo (al massimo due ore per ogni compito d'esame). Non è necessario affrontare gli esercizi di ciascun compito nell'ordine in cui sono presentati; ad esempio, il lettore potrebbe decidere di risolvere subito quelli che ritiene più consoni alla sua preparazione. Si ricorda che non è consentito l'uso di calcolatrici ed appunti di qualsivoglia natura.

[2] La valutazione numerica degli esercizi di Parte B.1, B.2 e B.3 è analoga, rispettivamente, a quella degli esercizi di Parte A.1, A.2 e A.3.

Allo scadere del tempo stabilito, è opportuna un'attenta ed immediata consultazione delle soluzioni, al fine di:

(i) determinare eventuali soluzioni alternative per gli esercizi risolti in modo corretto;
(ii) soffermarsi a comprendere appieno gli errori commessi negli esercizi risolti in modo sbagliato;
(iii) determinare le nozioni necessarie per affrontare alcuni degli esercizi che si è deciso di non risolvere (a volte, per una sorta di 'presunzione di difficoltà', come abbiamo riscontrato per alcune tipologie di quesiti, ad esempio quelli di natura combinatorica).

Ordine dei Capitoli. Consigliamo di leggere i capitoli nell'ordine in cui sono presentati. La ragione principale è che nei primi capitoli dedichiamo una particolare attenzione ad introdurre in modo preciso e puntuale la notazione che viene poi utilizzata nei capitoli successivi. Inoltre, alcuni 'tipi' di esercizi sono volutamente ripetuti in due o tre capitoli consecutivi, al fine di permettere al lettore di sviluppare la capacità di riconoscere problemi simili. Nei capitoli finali del libro sono infine presenti – in alcuni esercizi selezionati, spesso in Parte A.3 e Parte B.3 – delle brevi divagazioni, che suggeriscono come affrontare problemi similari o di carattere più generale.

Capitoli senza Svolgimenti. Gli ultimi cinque capitoli del libro presentano cinque compiti d'esame senza svolgimenti. Si consiglia di affrontare i relativi esercizi soltanto dopo avere risolto i precedenti quindici compiti d'esame.

Riferimenti bibliografici

Lo svolgimento degli esercizi di questo libro assume esclusivamente la conoscenza di base di uno studente che abbia seguito un Corso di Matematica Generale di primo livello. (In particolare, non è necessaria la conoscenza della teoria delle funzioni reali di più variabili reali.) Pertanto, qualsiasi libro di Matematica Generale che tratti in modo sufficientemente ampio gli argomenti propedeutici per una Laurea in Economia può considerarsi un adeguato supporto teorico. Tuttavia, faremo talvolta riferimento specifico al seguente testo per alcuni esercizi di Parte A (inerenti logica elementare, insiemistica, calcolo combinatorio ed insiemi numerici):

[GA2017] Giarlotta A., Angilella S., *Matematica Generale. Teoria e Pratica con Quesiti a Scelta Multipla – Volume I*, Seconda Edizione, Giappichelli 2017.

Ringraziamenti

Un sentito ringraziamento va innanzitutto a Silvia Angilella, per la stesura di molti compiti d'esame da cui alcuni degli esercizi di questo libro sono tratti, nonché, soprattutto, per i vent'anni di insegnamento svolto assieme in grande armonia e perfetta

comunanza di vedute. Estendo[3] tali ringraziamenti anche ai miei colleghi Salvatore Corrente e Damiano Rossello per la formulazione di alcuni esercizi di questo volume.

Ringrazio Davide Carpentiere, Angelo Petralia ed Ester Sudano per un accurato controllo degli svolgimenti degli esercizi, nonché per tanti preziosi e acuti commenti formulati 'con l'occhio dello studente'. Relativamente a questa seconda edizione, sono anche grato ai tanti studenti che hanno segnalato sviste e suggerito svolgimenti alternativi rispetto a quelli presentati. In ogni caso, gli eventuali errori presenti in questo volume sono esclusivamente a me ascrivibili.

Desidero esprimere la mia gratitudine allo Staff della Casa Editrice Giappichelli – e, in particolare, al dott. Fabio Vaudano – per il supporto tecnico, la pazienza e l'attenzione che mi ha dimostrato nel corso dell'elaborazione di questo libro.

Novissima autem non minimus, ringrazio il mio caro amico Domenico Cantone per avere acconsentito all'utilizzo di un'elaborazione di un suo disegno nella copertina di questo volume,[4] nonché la mia amata sorella Stefania Giarlotta per l'interpretazione grafica del disegno e l'intero progetto della copertina.

[3] In questo volume preferiamo utilizzare la prima persona plurale, per enfatizzare che assumiamo il punto di vista dei 'docenti'. Per i ringraziamenti, ritengo invece opportuno parlare al singolare.

[4] Il disegno originario, che esibisce un'altra dimostrazione puramente grafica del famoso Teorema di Pitagora, è apparso nel seguente articolo: Domenico Cantone (2020), "Yet another proof without words of the Pythagorean Theorem", *Mathematics Magazine* 93(4), page 306.

Capitolo 1

Parte A.1

Esercizio 1. Siano $\overrightarrow{r}$ ed $\overrightarrow{s}$ le rette di equazione, rispettivamente, $x = -1$ e $x = 5$. Sia inoltre $\overrightarrow{t}$ una retta di equazione $y = mx + n$ passante per il punto $P \equiv (-1, 3)$. Per quale valore reale **positivo** di $m \in \mathbb{R}$ l'area del trapezio delimitato da $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{s}$, $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{t}$ è pari a 21?

1. $m = \frac{2}{7}$
2. $m = \frac{1}{6}$
3. $m = \frac{4}{9}$
4. $m = \frac{3}{8}$
5. Nessuna delle altre risposte

Esercizio 2. Quanti sono i numeri naturali c_1c_2 di due cifre tali che $|c_1 - c_2| \leqslant 1$? (Ad esempio, i numeri naturali 10, 89 e 44 soddisfano la condizione richiesta.)

1. 14
2. 17
3. 21
4. 26
5. Nessuna delle altre risposte

Esercizio 3. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda & \frac{10}{3} \\ 1 & -2 & \lambda \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

con λ parametro reale. Quale delle seguenti asserzioni è **vera**?

1. $\mathsf{r}(A) = 3$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Per $\lambda = 2$, $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$

$\boxed{3}$ Per $\lambda = 0$, $\left|\frac{1}{2}A\right| = 6$

$\boxed{4}$ Esistono infiniti valori di λ per cui $\mathsf{r}(A) = 2$

$\boxed{5}$ Nessuna delle altre risposte

Parte A.2

Esercizio 4. Siano dati gli insiemi numerici

$$X = \left\{2 + \frac{3}{n+2} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{2\} \qquad \text{e} \qquad Y = \left\{2 - \frac{3}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup [-1, 1] \ ,$$

ove $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Quale delle seguenti asserzioni è **vera**?

$\boxed{1}$ $DX \setminus DY = \emptyset$

$\boxed{2}$ $\max Y = \min X$

$\boxed{3}$ $X \cup Y$ non è chiuso

$\boxed{4}$ $D(X \cup Y)$ è un intervallo chiuso

$\boxed{5}$ FY è un insieme finito

Esercizio 5. Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + y + 4z = 2 \\ x - 3z = a \\ 2x + y + a^2 z = 2 \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Quale delle seguenti asserzioni è **vera**?

$\boxed{1}$ Il sistema è sempre possibile

$\boxed{2}$ Per $a = 2$, la terna $(2, -2, 0)$ è l'unica soluzione del sistema

$\boxed{3}$ Esistono due valori distinti di a per cui il sistema è impossibile

$\boxed{4}$ Esiste esattamente un valore di a per cui il sistema è indeterminato

$\boxed{5}$ Nessuna delle altre risposte

Parte A.3

Esercizio 6. Siano dati i seguenti numeri naturali:

(a) $P^{(r)}_{2,2,2,2,2}$

(b) P_8

(c) $D_{9,5}$

(d) $D^{(r)}_{7,4}$

(e) $C^{(r)}_{5,6} \cdot C^{(r)}_{3,2}$.

Quale delle seguenti asserzioni è **vera**?

1. (a) > (b) > (c) > (e)
2. (b) > (a) > (d)
3. (c) > (b) > (e)
4. (d) > (c) > (e)
5. (a) > (b) > (d) > (c)

Parte B.1

Esercizio 7. Qual è l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$2^{\sqrt{|x^2-7|}} \leqslant 8 \ ?$$

1. $[-3, 3]$
2. $]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$
3. $[-4, 4]$
4. $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$
5. Nessuna delle altre risposte

Esercizio 8. Sia data la funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} a\,\mathrm{e}^{x-\frac{1}{2}} & \text{per} \quad x \leqslant 1/2 \\ x^2 - 4x + b & \text{per} \quad x > 1/2 \end{cases}$$

con a, b parametri reali. Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f è derivabile in $\mathbb{R}$?

1. $(a, b) = \left(-3, -\frac{1}{8}\right)$
2. $(a, b) = \left(1, \frac{11}{4}\right)$
3. $(a, b) = \left(1, -\frac{3}{4}\right)$
4. $(a, b) = \left(-3, \frac{7}{4}\right)$

5 Nessuna delle altre risposte

Esercizio 9. Quanto vale

$$\lim_{x \to -2} \Big[1 + \log(3+x)\Big]^{\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi x)}} \ ?$$

1 $\frac{1}{\pi}$

2 $\frac{\pi}{e}$

3 $e^{\frac{1}{\pi}}$

4 $e^{-\pi}$

5 Nessuna delle altre risposte

Parte B.2

Esercizio 10. Sia data la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-2|}$$

nel suo insieme di esistenza. Quale delle seguenti affermazioni è **vera**?

1 f è decrescente in $x = 1$ e $x = 3$

2 f ha un punto di flesso

3 f ha esattamente un asintoto orizzontale

4 f ha un minimo assoluto

5 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx < -\frac{1}{4}$

Esercizio 11. Quanto vale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x-5}{x^2-3x+2}\,dx \ ?$$

1 $-3\log 2 + 2\log 3$

2 $3\log 2 + 4\log 3$

3 $-\log 6$

4 $5\log 2 - 3\log 3$

5 $\log 2 - \log 3$

Parte B.3

Esercizio 12. Sia $f\colon\ [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = f(1) = 1$ e $f(2) = -1$. Quale delle seguenti asserzioni è **falsa**?

$\boxed{1}$ Il codominio di f ristretta a $[0,4]$ contiene l'intervallo $[-1,1]$

$\boxed{2}$ Esiste $c \in\ ]0,1[$ tale che $f(c) = 2c$

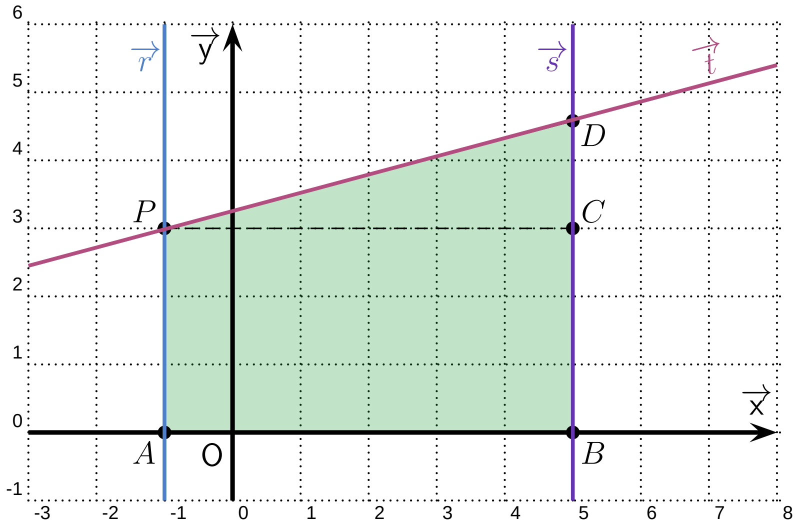
$\boxed{3}$ Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [3,+\infty[$, allora f ha un minimo relativo e assoluto

$\boxed{4}$ Se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in [5,+\infty[$, allora f ha un massimo assoluto

$\boxed{5}$ Se $f'(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in\ ]0,1[$, allora $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx > 1$

Soluzioni

Svolgimento 1. Il primo passo per la risoluzione di un qualsiasi esercizio di carattere geometrico è sempre quello di dare un'accurata rappresentazione grafica dei dati. Nel caso in esame, si ha:



Il problema richiede di determinare il coefficiente angolare m della retta $\overrightarrow{t}$ in modo che l'area del trapezio $ABDP$, evidenziata in colore verde, sia uguale a 21. Si noti che, poiché la retta $\overrightarrow{t}$ deve passare dal punto $P \equiv (-1, 3)$, la sua equazione generica è data da

$$y - 3 = m(x - (-1))$$

ossia

$$y = mx + (m + 3)$$

ove il coefficiente angolare m è maggiore di 0. Pertanto, le coordinate del punto D, intersezione delle rette $\overrightarrow{s}$ e $\overrightarrow{t}$, si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = mx + (m + 3) \, . \end{cases}$$

I punti $A \equiv (-1, 0)$, $B \equiv (5, 0)$, $C \equiv (5, 3)$ e $D \equiv (5, 6m + 3)$ sono aggiunti al grafico per chiarezza. Osserviamo che l'ordinata del punto D è maggiore dell'ordinata del punto C, in quanto m è positivo per ipotesi.

Impostato geometricamente il problema, risolverlo risulta agevole. Infatti, basta imporre che l'area del trapezio sia uguale a 21 e successivamente risolvere la corrispondente equazione nella variabile m (ricordando che m deve essere maggiore di 0 e dunque scartando eventuali soluzioni non positive). Essendo

$$\begin{aligned}\mathsf{Area}(ABDP) = 21 \quad &\iff \quad \frac{(\overline{AP} + \overline{BD}) \cdot \overline{AB}}{2} = 21 \\ &\iff \quad \frac{(3 + 6m + 3)\,6}{2} = 21 \\ &\iff \quad m = \frac{1}{6}\,,\end{aligned}$$

la risposta corretta è la $\boxed{\mathbf{2}}$.

Un modo alternativo di risolvere il problema, probabilmente più semplice, è basato su immediate considerazioni geometriche. L'area del trapezio $ABDP$ è uguale alla somma di due aree: quella del rettangolo $ABCP$ e quella del triangolo CDP. L'area del rettangolo $ABCP$ è uguale a $3 \cdot 6 = 18$. Pertanto, possiamo risolvere il problema trovando il valore di m tale che l'area del triangolo CDP sia uguale a $21 - 18 = 3$, ossia

$$\frac{\overline{CD} \cdot \overline{CP}}{2} = 3 \quad \iff \quad \frac{\overline{CD} \cdot 6}{2} = 3 \quad \iff \quad \overline{CD} = 1\,,$$

il che implica che $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ debba essere uguale a $\frac{1}{6}$. Si noti che questo modo di risolvere il problema non richiede nemmeno il calcolo delle coordinate del punto D.

Svolgimento 2. Per risolvere questo esercizio non è necessaria alcuna nozione di calcolo combinatorio. Invero, basta effettuare un pedissequo conteggio dei casi possibili. Poiché si devono contare tutti i numeri naturali c_1c_2 tali che il valore assoluto della differenza tra le due cifre c_1 e c_2 è al più 1, i seguenti tre casi sono gli unici possibili:

(i) $c_1 = c_2 - 1$,

(ii) $c_1 = c_2$,

(iii) $c_1 = c_2 + 1$.

Avendosi (si ricordi che un numero di due cifre non può avere 0 come prima cifra)

- 8 configurazioni del tipo (i), ossia 12, 23, …, 89,
- 9 configurazioni del tipo (ii), ossia 11, 22, …, 99,
- 9 configurazioni del tipo (iii), ossia 10, 21, …, 98,

ne segue che il numero totale dei casi possibili è $8 + 9 + 9 = 26$. Pertanto, la risposta corretta è la $\boxed{\mathbf{4}}$.

Svolgimento 3. Calcoliamo innanzitutto il determinante della matrice A. Si ha:

$$|A| \;=\; \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda & \frac{10}{3} \\ 1 & -2 & \lambda \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \;=\; -3\lambda^2+12 \;=\; -3(\lambda^2-4)\,,$$

che si annulla per $\lambda = \pm\,2$. Poiché il minore di Sud-Est

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo, il rango di A assume i seguenti valori al variare del parametro reale λ:

$$\mathsf{r}(A) \;=\; \begin{cases} 2 & \text{se} \quad \lambda = \pm\,2\,, \\ 3 & \text{se} \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\,2\}\,. \end{cases}$$

Da quanto sopra, si evince immediatamente che le seguenti risposte sono false: la $\boxed{1}$, la $\boxed{2}$ (in quanto per $\lambda = 2$ l'inversa di A non esiste) e la $\boxed{4}$. Inoltre, per $\lambda = 0$, si ha $|A| = 12$, per cui, essendo A una matrice quadrata di ordine 3, si ottiene[5]

$$\left|\tfrac{1}{2}A\right| \;=\; \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 |A| \;=\; \tfrac{1}{8}\,12 \;=\; \tfrac{3}{2}\,.$$

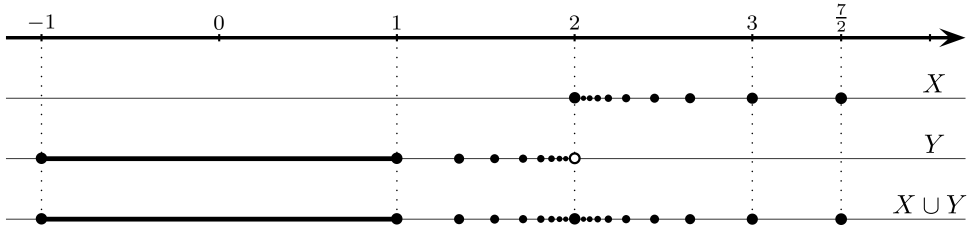
Pertanto, anche la risposta $\boxed{3}$ è falsa e dunque la risposta corretta è la $\boxed{\mathbf{5}}$.

Svolgimento 4. Per avere un'idea del comportamento degli insiemi X e Y, calcoliamone alcuni valori:

(X) $2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$ (per $n=0$), $2+1=3$ (per $n=1$), $2+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$ (per $n=2$), etc.

(Y) $2-\frac{3}{1}=-1$ (per $n=1$), $2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ (per $n=2$), $2-1=1$ (per $n=3$), etc.

Così come per i quesiti di carattere geometrico, anche per quelli relativi agli insiemi numerici risulta fondamentale una rappresentazione grafica degli insiemi dati. Nel caso in esame, si ha:



[5] Ricordiamo che se si moltiplica una riga di una matrice quadrata per un numero, allora il determinante della nuova matrice è uguale al determinante della matrice originaria moltiplicato per quel numero. Pertanto, nel caso in esame, poiché la matrice $\frac{1}{2}A$ è ottenuta da A moltiplicandone tutte e tre le righe per $\frac{1}{2}$, il determinante di $\frac{1}{2}A$ è uguale al determinante di A moltiplicato per $\left(\frac{1}{2}\right)^3$: in simboli, $\left|\frac{1}{2}A\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 |A|$.

L'insieme X è formato da una *successione* infinita (monotona decrescente) di punti che converge a 2 dalla destra,[6] a cui è stato aggiunto il punto di accumulazione 2. L'insieme Y è formato da una successione infinita (monotona crescente) di punti che converge a 2 dalla sinistra,[7] a cui è stato aggiunto l'intervallo chiuso $[-1,1]$ (ma non il punto 2, come si vede dalla figura). Risulta facile verificare quanto segue:

- $DX = \{2\}$, $FX = X$, $\mathring{X} = \emptyset$, $\overline{X} = X$ (X è chiuso), $\min X = 2$, $\max X = \frac{7}{2}$;
- $DY = [-1,1] \cup \{2\}$, $FY = (Y \setminus [-1,1]) \cup \{-1,1,2\}$, $\mathring{Y} =]-1,1[$, $\overline{Y} = Y \cup \{2\}$, $\min Y = -1$, $\sup Y = 2$ ($\nexists \max Y$);
- $D(X \cup Y) = [-1,1] \cup \{2\} = DY$, $F(X \cup Y) = FX \cup FY$, $X \mathring{\cup} Y =]-1,1[= \mathring{Y}$, $\overline{X \cup Y} = X \cup Y$ ($X \cup Y$ è chiuso), $\min(X \cup Y) = -1$, $\max(X \cup Y) = \frac{7}{2}$.

La risposta vera è la $\boxed{\mathbf{1}}$. Osserviamo che la risposta $\boxed{2}$ è falsa, in quanto Y non ha un massimo (ma soltanto l'estremo superiore). Inoltre sono false anche le risposte $\boxed{3}$ e $\boxed{4}$ (quest'ultima in quanto $D(X \cup Y)$ non è un intervallo per colpa del punto 2). Infine, anche la risposta $\boxed{5}$ è falsa, in quanto FY è un insieme infinito (soltanto alcuni punti della successione sono 'assorbiti' dall'intervallo $[-1,1]$).

Svolgimento 5. Per risolvere il sistema mediante il *Teorema di Rouchè-Capelli*, determiniamo il rango della matrice incompleta A e quello della matrice completa B al variare del parametro reale a, ove

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & a^2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & a \\ 2 & 1 & a^2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché il minore di Sud-Ovest

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

della matrice A ha determinante non nullo, si ha $\mathsf{r}(A) \geqslant 2$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Inoltre, essendo $|A| = -a^2 + 3a - 2$, per cui

$$|A| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 - 3a + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 1 \ \text{ oppure } \ a = 2\,,$$

si ottiene

$$\mathsf{r}(A) \ = \ \begin{cases} 2 & \text{se } \ a \in \{1,2\} \\ 3 & \text{se } \ a \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}\,. \end{cases}$$

Per determinare il rango della matrice completa B al variare del parametro a, applichiamo il *Teorema di Pascal*. (Ricordiamo che ovviamente si ha $\mathsf{r}(A) \leqslant \mathsf{r}(B) \leqslant 3$

[6] In simboli, $\lim_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{3}{n+2}\right) = 2^+$.

[7] In simboli, $\lim_{n\to+\infty} \left(2 - \frac{3}{n}\right) = 2^-$.

per ogni $a \in \mathbb{R}$.) Pertanto, dobbiamo soltanto calcolare i determinanti dei due orlati del minore S. Un orlato lo abbiamo già considerato: trattasi infatti della matrice incompleta A. Il secondo orlato di S è dato dalla seguente matrice:

$$T = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Essendo $|T| = -a^2 + 2a$, per cui

$$|T| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -a(a-2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \ \text{ oppure } \ a = 2\,,$$

si ottiene:

- per $a = 2$, si annullano i determinanti di entrambi gli orlati di S e dunque $\mathsf{r}(B)$ rimane 2;
- per $a = 1$, si annulla il determinante dell'orlato A ma non quello dell'orlato T; pertanto, $\mathsf{r}(B) = 3$ in questo caso.

In conclusione, si ha

$$\mathsf{r}(B) \;=\; \begin{cases} 2 & \text{se } \ a = 2 \\ 3 & \text{se } \ a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\,. \end{cases}$$

Adesso applichiamo il *Teorema di Rouchè-Capelli* per determinare il comportamento del sistema lineare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$:

valore di a	$\mathsf{r}(A)$	$\mathsf{r}(B)$	sistema	numero soluzioni
1	2	3	impossibile	0
2	2	2	indeterminato	∞^1
$\neq 1, 2$	3	3	determinato	1

Alla luce di questa analisi, la risposta corretta è la $\boxed{\mathbf{4}}$, mentre le risposte $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ e $\boxed{3}$ sono false (per $a = 2$, la terna $(2, -2, 0)$ è invero una soluzione del sistema, ma non è l'unica).

Svolgimento 6. Si ha

$$P^{(\mathrm{r})}_{2,2,2,2,2} \;=\; \frac{10!}{(2!)^5} \;=\; \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{32} \;=\; 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3\,,$$

nonché

$$C^{(\mathrm{r})}_{5,6}\, C^{(\mathrm{r})}_{3,2} \;=\; \binom{10}{6}\binom{4}{2} \;=\; \binom{10}{4}\frac{4 \cdot 3}{2!} \;=\; \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!}\,6 \;=\; 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4\,.$$

Scrivendo i cinque numeri naturali come segue[8]

$$\begin{array}{lllll}
\text{(a)} & P^{(\mathrm{r})}_{2,2,2,2,2} & = 5\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 3\cdot 5\cdot 3 & = & 8\cdot 7\cdot 9\cdot 5\cdot 30\\
\text{(b)} & P_8 & = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 & = & 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 24\\
\text{(c)} & D_{9,5} & = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 & = & 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 9\\
\text{(d)} & D^{(\mathrm{r})}_{7,4} & = 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7 & = & 7\cdot 7\cdot 7\cdot 1\cdot 7\\
\text{(e)} & C^{(\mathrm{r})}_{5,6}\, C^{(\mathrm{r})}_{3,2} & = 9\cdot 7\cdot 5\cdot 4 & = & 9\cdot 4\cdot 7\cdot 1\cdot 5
\end{array}$$

e confrontando i singoli fattori, si ottiene (a) > (b) > (c) > (d) > (e). Pertanto la risposta corretta è la $\boxed{\mathbf{1}}$.

Svolgimento 7. La disequazione in esame si può riscrivere come segue:

$$2^{\sqrt{|x^2-7|}} \leqslant 8 \quad\Longleftrightarrow\quad 2^{\sqrt{|x^2-7|}} \leqslant 2^3 \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{|x^2-7|} \leqslant 3$$

essendo la base delle potenze maggiore di 1. Trattandosi di una disequazione del tipo $\sqrt{A(x)} \leqslant B(x)$, essa si può riscrivere in modo equivalente

$$\begin{cases} |x^2-7| \geqslant 0 \\ 3 \geqslant 0 \\ |x^2-7| \leqslant 3^2 \end{cases}$$

ossia, essendo la prima e la seconda disequazione sempre soddisfatte,

$$|x^2-7| \leqslant 9\,.$$

Poiché ci siamo ricondotti ad una disequazione del tipo $|A(x)| \leqslant B(x)$, risolvere la disequazione originaria equivale a risolvere

$$\begin{cases} x^2-7 \leqslant 9 \\ x^2-7 \geqslant -9 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x^2 \leqslant 16 \\ x^2 \geqslant -2 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 \leqslant 16 \quad\Longleftrightarrow\quad -4 \leqslant x \leqslant 4\,.$$

Pertanto, la risposta corretta è $[-4,4]$, ossia la $\boxed{\mathbf{3}}$.

Svolgimento 8. La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} a\,\mathrm{e}^{x-\frac{1}{2}} & \text{per} \quad x \leqslant 1/2 \\ x^2-4x+b & \text{per} \quad x > 1/2 \end{cases}$$

è ovviamente (continua e) derivabile in $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, a prescindere dal valore dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$. L'unico punto in cui la funzione potrebbe risultare discontinua o non

[8] Si ricorda che non è possibile utilizzare la calcolatrice durante l'esame, dunque è conveniente decomporre opportunamente i numeri risultanti dai calcoli in fattori al fine di poterli ordinare.

derivabile è $\frac{1}{2}$, in quanto le leggi che la definiscono in $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ e in $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ sono diverse. Pertanto, si ha

$$f \text{ è derivabile in } \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è derivabile in } \tfrac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{(i)} & f \text{ è continua in } \frac{1}{2} \\ \text{(ii)} & f'_-\left(\frac{1}{2}\right) = f'_+\left(\frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

La condizione (i) è verificata se e solo se

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) \,.$$

Risultando

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \left(a\, e^{x-\frac{1}{2}}\right) = a\, e^0 = a = f\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

(l'ultima uguaglianza segue dal fatto che f è continua dalla sinistra in $\frac{1}{2}$), nonché

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \left(x^2 - 4x + b\right) = b - \tfrac{7}{4}\,,$$

la condizione (i) diventa $a = b - \frac{7}{4}$.

Inoltre, essendo

$$\begin{aligned} f'_-\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \left[\mathsf{D}\left(a\, e^{x-\frac{1}{2}}\right)\right]_{x=\frac{1}{2}} = \left[a\, e^{x-\frac{1}{2}}\right]_{x=\frac{1}{2}} = a\,, \\ f'_+\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \left[\mathsf{D}\left(x^2 - 4x + b\right)\right]_{x=\frac{1}{2}} = \left[2x - 4\right]_{x=\frac{1}{2}} = -3\,, \end{aligned}$$

la condizione (ii) equivale ad $a = -3$.

Infine, formando un sistema con le due condizioni di cui sopra, si ottiene che f è derivabile in $\frac{1}{2}$ (e dunque in $\mathbb{R}$) se e solo se

$$\begin{cases} a = b - \frac{7}{4} \\ a = -3 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad (a, b) = \left(-3, -\tfrac{5}{4}\right)\,.$$

Pertanto, la risposta corretta è la $\boxed{\mathbf{5}}$.

Svolgimento 9. Il limite si presenta nelle forma indeterminata $[1^\infty]$. Essendo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} \Big[1 + \log(x+3)\Big]^{\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi x)}} &= \lim_{x \to -2} \Big[1 + \log(x+3)\Big]^{\frac{1}{\log(x+3)} \, \frac{\log(x+3)}{x+2} \, \frac{x+2}{\operatorname{sen}(\pi x)}} \\ &= \lim_{x \to -2} \left(\Big[1 + \log(x+3)\Big]^{\frac{1}{\log(x+3)}}\right)^{\frac{\log((x+2)+1)}{x+2} \, \frac{x+2}{\operatorname{sen}(\pi x)}} \end{aligned}$$

nonché

$$\lim_{x\to -2}\left[1+\log(x+3)\right]^{\frac{1}{\log(x+3)}} = \mathrm{e} \qquad \text{(limite notevole)},$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\log((x+2)+1)}{x+2} = 1 \qquad \text{(limite notevole)},$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\operatorname{sen}(\pi x)} = \lim_{x\to -2}\frac{1}{\pi\cos(\pi x)} = \frac{1}{\pi} \qquad (\textit{Teorema di de l'Hôpital}),$$

si ottiene

$$\lim_{x\to -2}\left[1+\log(x+3)\right]^{\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi x)}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\pi}}.$$

Pertanto, la risposta corretta è la $\boxed{\mathbf{3}}$.

Svolgimento 10. Nello studio di una funzione in cui è presente un valore assoluto, il primo passo consiste nel determinare il suo insieme d'esistenza e scomporre la legge di definizione in due o più leggi. Nel caso in esame, essendo f definita dalla legge

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-2|}\,,$$

il suo insieme di esistenza I è dato da

$$I = \mathbb{R}\setminus\{2\}\,.$$

Pertanto, si ha, per ogni $x \in I$,

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-2|} = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} & \text{se } x-2>0 \\[2ex] \dfrac{x-1}{2-x} & \text{se } x-2<0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} & \text{se } x>2 \\[2ex] -\dfrac{x-1}{x-2} & \text{se } x<2\,. \end{cases}$$

In sintesi, f è definita dalla legge $f(x) = g(x) = \frac{x-1}{x-2}$ nell'intervallo aperto $]2,+\infty[$ e dalla legge $f(x) = h(x) = -\frac{x-1}{x-2} = -g(x)$ nell'intervallo aperto $]-\infty,2[$. Pertanto, studiamo innanzitutto la funzione razionale fratta

$$g\colon \mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\,, \qquad g(x) = \frac{x-1}{x-2} \qquad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}\,.$$

Successivamente, deriveremo dal grafico di g quello della funzione f.

1) Insieme d'esistenza. Continuità. La funzione g è continua in tutto il suo insieme d'esistenza $I = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ (che diventa il *dominio* della funzione).[9] Inoltre, g non presenta simmetrie e non è periodica.

[9] Si rinvia a un libro di teoria per la differenza tra 'insieme d'esistenza' e 'dominio' di una funzione.

2) Localizzazione. Studiamo il segno della funzione e l'esistenza di eventuali intersezioni con gli assi cartesiani. Essendo

$$x-1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1 \qquad \text{e} \qquad x-2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2\,,$$

si ottiene graficamente (ove il simbolo '$*$' sta per 'non definito')

		1		2	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x-1}{x-2}$	$+$	0	$-$	$*$	$+$

Riassumendo, si ha:

$$g(x) \geqslant 0 \iff \frac{x-1}{x-2} \geqslant 0 \iff x \leqslant 1 \text{ oppure } x > 2\,.$$

Le intersezioni con gli assi cartesiani sono ottenute come segue:

$$\begin{cases} g \\ \overrightarrow{x} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{x-1}{x-2} \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (1,0)\,,$$

$$\begin{cases} g \\ \overrightarrow{y} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{x-1}{x-2} \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \iff (x,y) = \left(0, \tfrac{1}{2}\right).$$

3) Comportamento agli estremi e in frontiera. Asintoti. Poiché l'insieme di esistenza è dato da $I =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$, calcoliamo i seguenti quattro limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x-2} = 1^- \quad \text{(il numeratore è minore del denominatore)}$$

$$\lim_{x\to2^-} g(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x-1}{x-2} = -\infty \quad \text{(il denominatore tende a 0 da sinistra)}$$

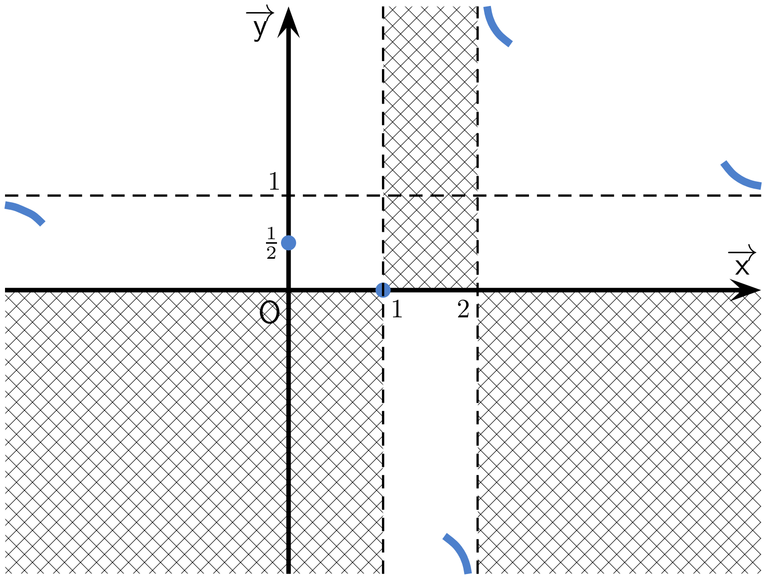
$$\lim_{x\to2^+} g(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{x-1}{x-2} = +\infty \quad \text{(il denominatore tende a 0 da destra)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x-2} = 1^+ \quad \text{(il numeratore è maggiore del denominatore).}$$

(Per convincersi che il primo limite tende a 1 dalla sinistra e non dalla destra, immaginiamo di dare a x valore -1000. La frazione sarà uguale a $\frac{-1001}{-1002} = \frac{1001}{1002} < 1$. Un ragionamento analogo permette di concludere che il quarto limite tende a 1 dalla destra.) Ne segue che il grafico di g presenta:

- un asintoto orizzontale completo (destro e sinistro), avente equazione $y = 1$;
- un asintoto verticale completo (destro e sinistro), avente equazione $x = 2$;
- nessun asintoto obliquo.

4) Rappresentazione grafica parziale. Alla luce dei punti 1), 2) e 3), possiamo tracciare un grafico approssimativo della funzione g, che ci permette di immaginare un possibile andamento del grafico completo di g. Nella figura che segue, le zone ombreggiate con un tratteggio obliquo sono quelle in cui il grafico della funzione g **non** si trova. Il grafico (parziale) della funzione g è in colore blu.



A questo punto, lo studente che abbia già svolto svariati studi di funzione sarà probabilmente in grado di disegnare correttamente il grafico completo di g. Tuttavia, per evitare di trarre (pericolose) conclusioni affrettate, è sempre consigliabile procedere in modo sistematico, calcolando anche le derivate (prima, seconda e, se necessario, le successive), al fine di determinare la crescenza/decrescenza e la concavità/convessità della funzione.

5) Derivata prima. Lo studio della derivata prima ci permette di determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente, eventuali punti di massimo o minimo relativi, nonché eventuali punti angolosi o cuspidali. Si ha:

$$g'(x) = \frac{(x-2)-(x-1)}{(x-2)^2} = -\frac{1}{(x-2)^2}\,.$$

Pertanto, la derivata prima g' ha lo stesso insieme d'esistenza I della funzione g, ossia g è derivabile in tutto il suo dominio (dunque non esistono né punti angolosi né punti cuspidali). Si noti che g' risulta anche continua in tutto I. Inoltre, essendo

$$g'(x) < 0 \quad \forall x \in I = \,]-\infty, 2[\, \cup \,]2, +\infty[\;,$$

la funzione g è decrescente *in ogni punto del suo dominio* I, come invero era lecito aspettarsi dal grafico parziale della g di cui al punto 4).