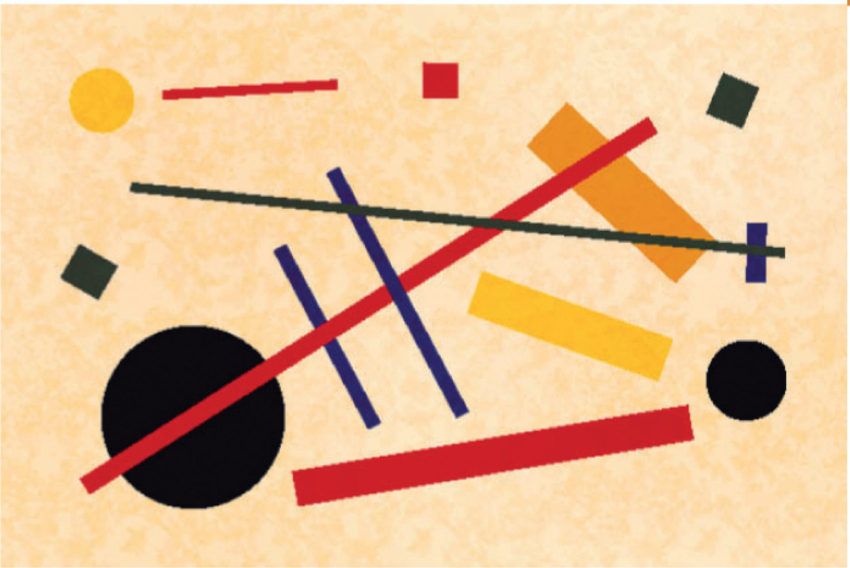
Alberto Cambini
Laura Carosi
Laura Martein

Matematica di base per l'economia e l'azienda

Richiami di teoria, esercizi e applicazioni



G. Giappichelli Editore

Introduzione

La maggior parte dei corsi di laurea triennali delle classi L15 (Scienze del Turismo), L18 (Scienze dell'Economia e della Gestione Aziendale) e L33 (Scienze Economiche) prevedono, tra le attività formative del primo anno, un insegnamento di matematica di base. Saper ragionare in modo astratto, migliorare e sviluppare le capacità di calcolo e quelle logiche deduttive, conoscere nuovi strumenti matematici sono tra le principali competenze collegate a questa tipologia di insegnamento. L'essere inserito all'interno di un percorso di studio di carattere economico impone la necessità di evidenziare i costanti legami tra la realtà economica e la matematica e di far intravedere agli studenti le potenzialità degli argomenti studiati in relazione ai modelli economici e aziendali. L'insegnamento della matematica gioca anche un ruolo fondamentale nell'acquisizione e miglioramento di una delle otto competenze chiave definite dall'Unione Europea, ovvero "la capacità di sviluppare e applicare il pensiero e la comprensione matematica per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane". Al rigore scientifico e all'astrattismo proprio della matematica deve quindi affiancarsi un'attenzione per le applicazioni degli argomenti studiati.

La riflessione sul ruolo della matematica nei corsi di laurea a carattere economico e nella formazione delle cosiddette soft skills degli studenti ha motivato la realizzazione di questo volume. È opinione degli autori che una buona comprensione e assimilazione di un argomento di matematica debba necessariamente passare attraverso lo svolgimento accurato di appropriati esercizi. Non si può affermare di avere una buona padronanza di uno strumento matematico se non si è in grado di risolvere gli esercizi ad esso collegati e di comprendere le sue potenziali applicazioni sia nella vita quotidiana che in campo economico e aziendale.

Con l'intento di creare uno strumento didattico efficace che possa aiutare lo studente nel raggiungimento delle varie competenze, per ogni argomento trattato sono riportati puntuali richiami di teoria e numerosi esempi svolti introdotti con la necessaria gradualità. Il continuo riferimento agli aspetti teorici e concettuali proposto nello svolgimento degli esempi ha lo scopo di evidenziare l'unitarietà tra logica e tecnica risolutiva. Il testo contiene numerosi esercizi con i quali lo studente può controllare il grado di preparazione raggiunto, confrontando il proprio svolgimento con le soluzioni che si trovano nell'ultimo capitolo. Attraverso lo svolgimento ragionato degli esercizi, si richiede quindi allo studente di partecipare attivamente al processo di apprendimento.

Allo scopo di evidenziare i legami tra matematica e problemi di vita quotidiana e tra matematica ed economia, la trattazione dei molti argomenti è corredata dalla presentazione di applicazioni di carattere economico e aziendale. Il costante collegamento tra gli argomenti matematici presentati ed i modelli economici vuole fornire agli studenti una forte motivazione per uno studio della matematica vista non tanto come scienza astratta, ma piuttosto come strumento essenziale per l'analisi e comprensione dei fenomeni economici.

Alcune indicazioni utili per la lettura

Per facilitare la lettura, i richiami di teoria sono presentati all'interno di riquadri simili al seguente:

> Esempio di riquadro di teoria all'interno del volume.
> Si invitano gli studenti a leggere quanto scritto nei riquadri con molta attenzione!!!

L'inserimento nei riquadri dei richiami di teoria ne consente un'immediata individuazione ed una migliore schematizzazione dei concetti necessari alla comprensione degli esempi ed alla risoluzione degli esercizi.
Con riferimento agli esempi, l'inizio dello svolgimento guidato di ciascun esempio è segnalato dall'icona .
Infine, il libro cartaceo è corredato da un'espansione on line, che arricchisce il volume sotto vari aspetti. Vi sono presenti ulteriori esercizi di riepilogo ed argomenti di approfondimento su ciascuna delle tre parti del volume, funzioni di

una variabile, algebra lineare e funzioni di più variabili. All'interno dell'indice del libro cartaceo, è stato riportato anche l'elenco degli argomenti dell'espansione on line. La parte dell'indice relativa all'espansione on line è contrassegnata dall'icona 💻. Quest'ultima si ritrova anche tra le pagine del testo, ogni qualvolta si vuole segnalare al lettore che l'espansione on line offre un utile approfondimento dell'argomento trattato.

Informazioni dettagliate su come accedere all'espansione on line sono disponibili alla fine del libro.

Non ci resta che augurarvi buona lettura e buono studio!

Gli Autori

Parte I

Funzioni di una variabile

Capitolo 1

Funzioni

1.1 Topologia della retta

Retta numerica e intervalli

Fissando su una retta un punto come origine, un verso ed una unità di misura, si viene a stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri reali e i punti della retta nel senso che ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta e viceversa. Ci riferiremo a tale rappresentazione con il termine di **retta numerica**.

Ad un segmento della retta corrisponde un **intervallo limitato** del tipo

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \le x \le b\}; \quad (a,b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\};$$
$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \le b\}; \quad [a,b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \le x < b\}.$$

Ad una semiretta contenuta nella retta numerica corrisponde un **intervallo illimitato** del tipo

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \ge a\}; \quad (a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\};$$
$$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \le a\}; \quad (-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < a\}.$$

Intorni di un punto

- un **intorno** (circolare) di centro $z \in \mathbb{R}$ e raggio R è un intervallo del tipo
$$I(z) = (z - R, z + R)\,, R > 0$$

- un **intorno destro** di $z \in \mathbb{R}$ e raggio R è un intervallo del tipo

$$I^+(z) = (z, z + R)\,, R > 0$$

- un **intorno sinistro** di $z \in \mathbb{R}$ e raggio R è un intervallo del tipo

$$I^-(z) = (z - R, z)\,, R > 0$$

- un **intorno di $-\infty$** è una semiretta del tipo

$$I(-\infty) = (-\infty, M) = \{z \in \mathbb{R} : z < M\}$$

- un **intorno di $+\infty$** è una semiretta del tipo

$$I(+\infty) = (M, +\infty) = \{z \in \mathbb{R} : z > M\}$$

Punti interni, punti di frontiera e punti isolati
Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Diremo che:

- $x_0 \in A$ è **punto interno** di A se esiste un intorno di x_0 contenuto in A;
- $x_0 \in \mathbb{R}$ è **punto di frontiera** di A se ogni intorno di x_0 contiene punti di A e punti non appartenenti ad A;
- $x_0 \in A$ è **punto isolato** di A se esiste un intorno di x_0 che non contiene punti di A eccetto il punto stesso.

Insiemi aperti e insiemi chiusi
Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Diremo che:

- A è un insieme **aperto** se ogni suo punto è interno.
- A è un insieme **chiuso** se contiene tutti i suoi punti di frontiera.

Esempio 1.1.1 Si considerino gli insiemi:
$A = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 4 \leq 0\}$, $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 4 < 0\}$,
$B = \{x \in \mathbb{R} : \ \dfrac{x+2}{x-2} \leq 0\}$ e $B_1 = \{x \in \mathbb{R} : \ \dfrac{x-2}{x+2} \leq 0\}$.
Specificare i punti interni e i punti di frontiera di A, A_1, B, B_1 e dire se A, A_1, B, B_1 sono insiemi aperti, insiemi chiusi, non aperti, non chiusi.

Si ha $A = [-2, 2]$. Ogni punto $z \in (-2, 2)$ è interno ad A in quanto è possibile determinare un intorno di $z \in A$ contenuto in A (vedi ad esempio Figura 1.1). Il punto $-2 \in A$ è di frontiera per A in quanto ogni intorno di -2 contiene sia punti di A sia punti non appartenenti ad A, anologamente $2 \in A$ è di frontiera per A. Ne consegue che A è un insieme chiuso poiché contiene i suoi punti di frontiera.

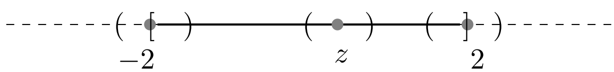


Figura 1.1

Risulta $A_1 = (-2, 2)$. Poiché ogni punto $z \in (-2, 2)$ è interno ad A_1 e i punti di frontiera $-2, 2$ non appartengono ad A_1, ne consegue che A_1 è un insieme aperto.
Si ha $B = [-2, 2)$. Ripetendo le considerazioni precedenti, ogni punto dell'intervallo $(-2, 2)$ è interno a B, mentre i punti $-2, 2$ sono di frontiera per B.
B non è aperto perchè contiene il punto di frontiera -2 e non è chiuso perchè non contiene il suo punto di frontiera 2.
Infine $B_1 = (-2, 2]$. I punti interni di B_1 sono i punti dell'intervallo $(-2, 2)$, i punti di frontiera sono $-2, 2$.
B_1 non è aperto perchè contiene il punto di frontiera 2 e non è chiuso perchè non contiene il suo punto di frontiera -2.

Esempio 1.1.2 Si considerino gli insiemi
$A = \{x \in \mathbb{R} : \ \dfrac{x^2+1}{x-1} \geq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : \ \dfrac{x-1}{x^2+1} \geq 0\}$.
Specificare i punti interni e i punti di frontiera di A e B e dire se A, B sono insiemi aperti, insiemi chiusi, non aperti, non chiusi.

Si ha $A = (1, +\infty)$. Ogni punto $z \in (1, +\infty)$ è interno ad A in quanto è possibile determinare un intorno di $z \in A$ contenuto in A (vedi ad esempio Figura 1.2). Il punto $1 \notin A$ è di frontiera per A in quanto ogni intorno di 1 contiene sia punti di A sia punti non appartenenti ad A. A è un insieme aperto perché ogni suo punto è interno.

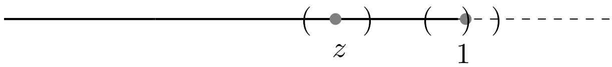


Figura 1.2

$B = [1, +\infty)$. I punti interni di B_1 sono i punti della semiretta $(1, +\infty)$, $1 \in B$ è di frontiera. Ne consegue che B è un insieme chiuso poiché contiene i suoi punti di frontiera.

In generale
(a, b) è un **intervallo aperto** in quanto è aperto come insieme;
$[a, b]$ è un **intervallo chiuso** in quanto è chiuso come insieme.
Gli intervalli $[a, b)$ e $(a, b]$ non sono **nè chiusi nè aperti**; il primo intervallo contiene il suo punto di frontiera a ma non il suo punto di frontiera b. Diremo che $[a, b)$ è un intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra. Analogamente diremo che $(a, b]$ è un intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra.
Le semirette $(a, +\infty)$ e $(-\infty, a)$ sono **insiemi aperti** mentre le semirette $[a, +\infty)$ e $(-\infty, a]$ sono **insiemi chiusi**.

Esempio 1.1.3 Si considerino gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2(x-3) \geq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : \ \dfrac{x^2-4}{x+5} \leq 0\}$.
Specificare i punti interni e i punti di frontiera di A, B e dire se A, B sono insiemi aperti, insiemi chiusi, non aperti, non chiusi.

Si ha $A = \{0\} \cup [3, +\infty)$. Ogni punto $z \in (3, +\infty)$ è interno ad A in quanto è possibile determinare un intorno di $z \in A$ contenuto in A (vedi ad esempio Figura 1.3).

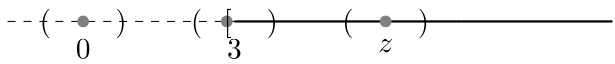


Figura 1.3

Il punto 3 è di frontiera per A in quanto ogni intorno di 3 contiene sia punti di A sia punti non appartenenti ad A. Il punto 0 è di frontiera per A in quanto ogni intorno di 0 contiene sia punti di A, sia punti non appartenenti ad A. Si osservi che il punto $0 \in A$ è un **punto isolato** in quanto è possibile determinare un suo intorno che non contiene punti dell'insieme eccetto il punto stesso; ne consegue che un punto isolato è un punto di frontiera.
A è un insieme chiuso poiché contiene i suoi punti di frontiera.
$B = (-\infty, -5) \cup [-2, 2]$. I punti interni di B sono quelli appartenenti all'insieme $(-\infty, -5) \cup (-2, 2)$; i punti di frontiera sono $-5, -2, 2$.
B non è aperto perchè contiene i punti di frontiera $-2, 2$ e non è chiuso perchè non contiene il suo punto di frontiera -5.

Esempio 1.1.4 Dato l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \ (x+4)(x-1)(x-3) = 0\}$, specificare i punti interni e i punti di frontiera. Stabilire se A è un insieme aperto oppure chiuso.
Si ha $A = \{-4, 1, 3\}$. Gli elementi di A sono punti isolati e quindi di frontiera per A; non esistono punti interni.
A è un insieme chiuso poiché contiene i suoi punti di frontiera.

Esempio 1.1.5 Si consideri l'insieme $E = \{x \in \mathbb{R} : \ 4 - x^2 \geq 0, \ x \neq 0\}$; specificare i punti interni e i punti di frontiera di E e dire se E è un insieme aperto oppure chiuso.
Si ha $E = [-2, 0) \cup (0, 2]$. I punti interni di E sono i punti dell'insieme $(-2, 0) \cup (0, 2)$. Il punto 0 non è interno in quanto non appartiene ad E ma è di frontiera in quanto ogni suo intorno contiene punti di E e punti non appartenenti ad E (in questo caso il punto stesso 0). I punti di frontiera sono $-2, 0, 2$.
E non è aperto perché contiene i punti di frontiera $-2, 2$ e non è chiuso in quanto non contiene il suo punto di frontiera 0.

Esercizi

1.1.1 Siano $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{(x+1)^2(x+2)^2}{x} \geq 0 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2}{x+1} \geq 0 \right\}$. Specificare i punti interni e i punti di frontiera di A e di B. Stabilire se A, B sono insiemi aperti, insiemi chiusi, non aperti, non chiusi.

1.1.2 Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : \log x \geq 1\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{\dfrac{x^2}{(x-1)^2}} \geq 0 \right\}$. Specificare i punti interni e i punti di frontiera di A e di B e dire se A, B sono insiemi aperti, insiemi chiusi, non aperti, non chiusi.

1.1.3 Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : (x-1)^2(x-2)^2(x^2-16) \geq 0\}$. Specificare i punti interni e i punti di frontiera di A e dire se A è un insieme aperto oppure chiuso.

1.1.4 Sia $E = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1, \ x \neq 2\}$. Specificare i punti interni e i punti di frontiera di E e dire se E è un insieme aperto oppure chiuso.

1.2 Sul concetto di funzione

☞ Una funzione tra due insiemi X, Y è una corrispondenza che associa ad ogni elemento di X uno ed un solo elemento di Y.
Denotando la corrispondenza con f, la funzione si esprime nel seguente modo:

$$f : X \to Y, \ x \to y = f(x)$$

o, più semplicemente

$$y = f(x), \ x \in X$$

x è la **variabile indipendente** e $y = f(x)$ è la **variabile dipendente**; X è detto **dominio di definizione** della funzione e Y è detto **codominio**.
Una funzione si dice a valori reali quando $Y = \mathbb{R}$. Nel seguito considereremo solo funzioni a valori reali.
Se $X \subset \mathbb{R}$, f ha una sola variabile indipendente; se $X \subset \mathbb{R}^2$, f ha due variabili indipendenti; in generale se $X \subset \mathbb{R}^n$, f ha n variabi-

li indipendenti. Tratteremo funzioni con due variabili indipendenti nel Capitolo 12 mentre il caso $n > 2$ è trattato nel Capitolo 5 dell'espansione on line.

Esempio 1.2.1 Un edicolante riceve ogni mattina 900 giornali quotidiani da rivendere a €1.30 ciascuno. Ovviamente il ricavo r ottenuto dalla vendita dei quotidiani dipende (ovvero è funzione) dal numero di giornali venduti; in che modo possiamo esprimere questa dipendenza?

Se si vendono 100 giornali si ricavano $1.3 \cdot 100 = 130$ euro, se si vendono 200 giornali si ricavano $1.3 \cdot 200 = 260$ euro e così via.

In generale, indicando con x il generico numero di giornali venduti e con $r(x)$ il ricavo corrispondente, si ha la relazione $r(x) = 1.30x,\ 0 \leq x \leq 900$. L'insieme del numero di giornali che verificano le condizioni $0 \leq x \leq 900$ è il **dominio di definizione** della funzione. Diremo anche che *la funzione ricavo è definita nell'intervallo* $[0, 900]$ nel senso che, nel contesto del problema, non ha significato attribuire a x valori negativi o superiori a 900.

Esempio 1.2.2 Si consideri la seguente legge:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq -2 \\ x^2 & -2 < x < a \\ x+3 & x \geq 5 \end{cases}$$

i) Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la legge data rappresenta una funzione, specificando il caso in cui il dominio di definizione è l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

ii) Quando il dominio di f è uguale ad $\mathbb{R}$, calcolare $f(2),\ f(-3),\ f(6),\ f(4)-f(z)$.

i) Per essere una funzione occorre che ad ogni elemento del dominio corrisponda uno ed un solo numero reale; conseguentemente, a deve essere minore di 5. Se ad esempio fosse $a = 7$ si avrebbe, per $x = 6,\ f(6) = 36$ in quanto $6 \in (-2, 7)$ e $f(6) = 9$ in quanto $6 \geq 5$. Al numero 6 sarebbero così associati due numeri distinti e ciò è in contraddizione con la definizione di funzione.

Il dominio di f coincide con $\mathbb{R}$ quando $a = 5$.

ii) $2 \in (-2, 5) \ \Rightarrow f(2) = 4; \quad -3 \in (-\infty, -2] \ \Rightarrow f(-3) = -5;$

$6 \in [5, +\infty) \ \Rightarrow f(6) = 9$.
Per calcolare $f(4) - f(z)$, occorre specificare in quale intervallo cade il numero z. Essendo $f(4) = 16$, si ha:

$$f(4) - f(z) = \begin{cases} 16 - (2z+1) = 15 - 2z & z \leq -2 \\ 16 - z^2 & -2 < z < 5 \\ 16 - (z+3) = 13 - z & z \geq 5 \end{cases}$$

Esempio 1.2.3 Data la funzione $f(x) = x^2 + 2x - 4, \ x \in \mathbb{R}$, calcolare:
$f(a), \ f(2t+3), \ f(2x), \ f(\frac{x}{2}), \ f(x-2), \ f(x^2-1)$.
Nella scrittura $f(x) = x^2 + 2x - 4$, la variabile x che compare al secondo membro coincide con l'argomento che appare al primo membro nella parentesi tonda. Scrivendo $f(a)$, abbiamo fissato per argomento a e quindi al secondo membro dobbiamo sostituire x con a, da cui $f(a) = a^2 + 2a - 4$.
Analogamente $f(2t + 3)$ significa fissare $2t + 3$ come argomento e quindi, per calcolare il valore ad esso corrispondente, occorre sostituire $x = 2t+3$ nel secondo membro, da cui $f(2t + 3) = (2t + 3)^2 + 2(2t + 3) - 4 = 4t^2 + 16t + 11$.
Ragionando in modo analogo, per calcolare $f(2x), f(\frac{x}{2}), f(x-2), f(x^2-1)$, occorre sostituire nel secondo membro, al posto di x, rispettivamente $2x, \frac{x}{2}, x-2, x^2-1$.
Risulta:

$$\begin{aligned} &f(2x) = (2x)^2 + 2(2x) - 4 = 4x^2 + 4x - 4 \\ &f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{2}\right) - 4 = \frac{x^2}{4} + x - 4 \\ &f(x-2) = (x-2)^2 + 2(x-2) - 4 = x^2 - 2x - 4 \\ &f(x^2-1) = (x^2-1)^2 + 2(x^2-1) - 4 = x^4 - 5. \end{aligned}$$

Esempio 1.2.4 Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x^2+1} & x \leq 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$$

Calcolare $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}, \ h \neq 0$, distinguendo i casi $h > 0$ e $h < 0$.
$h > 0 \Rightarrow 1 + h > 1 \Rightarrow f(1 + h) = 2$, da cui $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{2-2}{h} = 0$;

$h < 0 \Rightarrow 1 + h < 1$, da cui $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{\frac{4}{(1+h)^2+1} - 2}{h} = \dfrac{-2h-4}{h^2+2h+2}$.

Esercizi

1.2.1 Date le seguenti funzioni:
a) $f(x) = 3x - 5$; *b)* $f(x) =| 3x - 5 |$; *c)* $f(x) = x+ | x |$; *d)* $f(x) = x^2 - 2x$,
calcolare $f(0)$; $f(2)$; $f(-2)$; $f(2x)$; $f(x+1)$; $f(x+h)$.

1.2.2 Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x - 1}$, $x \neq 1$
a) calcolare $\dfrac{f(0) + 2f(-1)}{3f(2)}$;
b) dire per quali valori della variabile x, si ha $f(x) = 3$.

1.2.3 Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \leq 1 \\ x^3 & 1 < x < 3 \\ -3 & x \geq 3 \end{cases}$$

a) Calcolare $f(2) + 4f(0) - 2f(5)$.
b) Calcolare al variare di $z \in \mathbb{R}$, $f(z) + 2f(1) + 5$.

1.2.4 Calcolare $f(3 + h)$, $f(3x)$, $f(\frac{x+1}{2})$ per le seguenti funzioni:
i) $f(x) = 8$, $x \in \mathbb{R}$; ii) $f(x) = 2 + 5x$, $x \in \mathbb{R}$;
iii) $f(x) = 3 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$; iv) $f(x) = \frac{x}{2x+3}$, $x \neq -\frac{3}{2}$, $x \in \mathbb{R}$;
v) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x \geq -1$; vi) $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

1.2.5 Date le seguenti funzioni: $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$, calcolare $f(f(x))$; $f(g(x))$; $g(g(x))$; $g(f(x))$.

1.2.6 Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x \leq 4 \\ 3x + 7 & x > 4 \end{cases}$$

Calcolare $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$, $h \neq 0$.