S. Corrente, S. Greco, B. Matarazzo, S. Milici

Matematica generale

TERZA EDIZIONE

Giappichelli

Prefazione

Il presente manuale è stato concepito a fini didattici, ideato in particolare per gli studenti dei corsi di studio afferenti alla cosiddetta Area 13, ossia "Scienze economiche e statistiche", e di quelli ove è previsto un insegnamento istituzionale di Matematica. Nella sua stesura, pertanto, si sono tenute in debito conto innanzitutto le peculiari esigenze di contenuto dei corsi istituzionali di Matematica e delle altre discipline quantitative, nonché quelle di altri insegnamenti che necessitano preliminarmente di peculiari conoscenze matematiche.

Da una parte, infatti, la propedeuticità, formale o sostanziale, della Matematica Generale a tutte le discipline matematico-statistiche e ad alcuni insegnamenti economici impartiti nei suddetti corsi comporta una notevole estensione dei contenuti di tale disciplina. Infatti, per motivi di completezza, accanto ai concetti fondamentali dell'Analisi matematica, dell'Algebra e della Geometria analitica, che costituiscono gli insostituibili attrezzi del mestiere, essa deve trattare anche altre precipue tematiche utili sia per gli studi successivi, sia per fornire agli studenti quella "forma mentis" e quel possesso del potente, sintetico ed inequivocabile linguaggio matematico, indispensabili per la comprensione, l'uso e la costruzione di adeguati modelli formali.

D'altra parte, comprensibili esigenze di sintesi e chiarezza espositiva – richieste dall'ampiezza degli argomenti trattati e dalla natura stessa del manuale – suggeriscono di adoperare un linguaggio facilmente comprensibile, non rinunciando, ove opportuno, all'intuito geometrico, ma tuttavia preservando le imprescindibili esigenze di rigore formale e di precisione proprie della Matematica. Nella stesura del presente manuale, quindi, si fa ricorso anche al formalismo e al simbolismo, necessari per un approccio sistematico alla materia, ma affiancandoli nell'esposizione degli argomenti ad un uso esteso del linguaggio corrente per una più immediata comprensione che ne faciliti lo studio.

Circa il contenuto del manuale, si sono voluti compendiare gli argomenti impartiti tradizionalmente nei corsi di Matematica Generale, corredati altresì dalla trattazione di altre tematiche di rilievo, secondo gli orientamenti della *più recente trattatistica. Si sono poi raccolti in un'Appendice alcuni argomenti non sempre inseriti nei programmi dei corsi istituzionali, qualche richiamo di concetti di base e alcuni approfondimenti di tematiche del corso. Ciascun docente potrà così scegliere i contenuti e il percorso didattico che ritiene più opportuni e appropriati agli obiettivi formativi del corso di studio ove l'insegnamento è impartito. Infatti – a nostro giudizio – i contenuti del manuale possono essere opportunamente selezionati e organizzati in maniera abbastanza flessibile per coprire le diverse esigenze didattiche dei corsi di studio sia di primo che di secondo livello.*

Speriamo di aver così reso un utile servizio ai docenti ed agli studenti, proponendo un manuale di riferimento che li potrà accompagnare durante il loro intero percorso formativo universitario, e confidiamo, pertanto, in una benevola accoglienza del nostro lavoro.

Ringraziamo il nostro collega Andrea Scapellato che ha pazientemente e proficuamente collaborato alla revisione del volume, con utili suggerimenti ed appropriate osservazioni, nonché l'Editore nelle persone dei Dottori Fabio Vaudano e Valentina Zaza che con grande professionalità ci hanno assistito e hanno curato la parte editoriale. Ovviamente, tutti gli errori (inevitabili) sono da imputare solamente a noi.

GLI AUTORI

Ottobre 2021

Capitolo Primo

Insiemi

1.1. *Quantificatori e simboli logici*

Nel corso della trattazione spesso si usano alcuni simboli della logica formale che indicano in modo abbreviato delle frasi ricorrenti.

I QUANTIFICATORI LOGICI sono i tre simboli seguenti:

1. $\exists$, quantificatore *esistenziale*, che si legge «*esiste almeno un*»; un caso particolare è $\exists!$, che si legge «*esiste uno ed uno solo*»;
2. $\forall$, quantificatore *universale*, che si legge «*per ogni, qualunque sia*»;
3. $\nexists$, che è la negazione del quantificatore esistenziale e si legge «*non esiste*».

Esempio

Marco, Andrea e Matteo hanno rispettivamente 14, 18 e 20 anni. Le seguenti proposizioni adoperano i quantificatori logici definiti sopra:

– $\exists$ almeno un ragazzo maggiorenne tra i tre considerati (sia Andrea che Matteo sono maggiorenni);

– $\exists!$ ragazzo che abbia 20 anni (solamente Matteo ha 20 anni);

– $\forall$ ragazzo ha un'età almeno pari a 14 anni (tutti i ragazzi hanno un'età maggiore o uguale a 14 anni);

– $\nexists$ alcun ragazzo che abbia un'età inferiore a 14 anni (non esiste alcun ragazzo che abbia un'età inferiore a 14 anni).

Una *proposizione logica* è una proposizione di cui si può affermare con certezza la sua verità o falsità. Per esempio,

"3 è un numero pari"

è una proposizione logica, in quanto si può affermare in maniera inequivocabile che essa è falsa. Analogamente

"Oggi è una bella giornata"

non è una proposizione logica, in quanto non si può affermare in maniera univoca che essa sia vera o falsa, poiché la sua veridicità o falsità dipende dalla percezione del soggetto che enuncia o ascolta la frase stessa.

Date due proposizioni logiche A e B, si possono definire i seguenti simboli d'IMPLICAZIONE logica tra di esse:

1. $\Rightarrow$ che significa «*implica*»;
2. $\Leftrightarrow$ che significa «*equivalente a, implica e viceversa*»;
3. $\not\Rightarrow$ che significa «*non implica*»;
4. $\not\Leftrightarrow$ che significa «*non equivalente a*».

Si osservi che, considerate due proposizioni logiche A e B, $A \Rightarrow B$ significa che il verificarsi di A è condizione *sufficiente* per il verificarsi di B e il verificarsi di B è condizione *necessaria* per il verificarsi di A. Così, ad esempio, nell'implicazione $x > 5 \Rightarrow x > 2$, si osserva immediatamente che la proposizione $x > 5$ è condizione sufficiente (ma non necessaria) perché sia $x > 2$; viceversa, $x > 2$ è condizione necessaria (ma non sufficiente) perché sia $x > 5$. In questo caso si può quindi dire che $x > 2 \not\Rightarrow x > 5$ (ad esempio, se $x = 3$, allora è vero che $x > 2$ ma non è vero che $x > 5$).

Si noti che il simbolo $\Leftarrow$ può essere definito in maniera analoga e, in particolare, $B \Leftarrow A$ è equivalente ad $A \Rightarrow B$.

$A \Leftrightarrow B$, invece, indica che A è condizione *necessaria e sufficiente* per B e viceversa. Si osservi che $A \Leftrightarrow B$ è equivalente ad $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$ e che $A \not\Leftrightarrow B$ se e solo se $A \not\Rightarrow B$ e/o $B \not\Rightarrow A$.

Ad esempio, le proposizioni $x \neq 0$ e $x^2 > 0$ *sono equivalenti* perché, da una parte, se $x \neq 0$ allora $x^2 > 0$ ($x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$) e, dall'altra, se $x^2 > 0$ allora $x \neq 0$ ($x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$). In conclusione, $x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$ indica che la proposizione $x \neq 0$ è condizione necessaria e sufficiente perché $x^2 > 0$ e viceversa.

Si usano anche i simboli | e : che si leggono "*tale che*".

Ad esempio, la frase "esiste un solo valore reale il cui quadrato è nullo" si può scrivere come segue:

$$\exists x \in \mathbf{R}: x^2 = 0.$$

1.2. *Insiemi, sottoinsiemi ed operazioni*

Con le parole INSIEME, COLLEZIONE, CLASSE, FAMIGLIA, ecc., si indicano degli enti primitivi [(1)]. Un insieme è formato (ossia contiene, è composto) da oggetti che si chiamano ELEMENTI e che godono di una o più caratteristiche comuni.

Nel seguito gli insiemi si indicano con lettere latine maiuscole ed i loro ele-

---

(1) Si chiamano *enti primitivi* quegli enti che non si definiscono (ossia di conoscenza comune) in quanto introdotti come nozioni non derivabili da concetti più elementari.

menti con lettere latine minuscole. Se un insieme A contiene gli elementi a, b, c, ... si scrive:

$$A = \{a, b, c, ...\}.$$

Per dire che a è un elemento dell'insieme A si scrive $a \in A$, che si legge "*a appartiene ad A*", mentre per dire che a non è un elemento di A si scrive $a \notin A$, che si legge "*a non appartiene ad A*". Pertanto, $a \in A$ ed $a \notin A$ sono proposizioni logiche in quanto è possibile affermare con certezza e in maniera inequivocabile che ognuna di esse sia vera o falsa, non essendo possibile alcun caso intermedio.

Si dice che due insiemi A e B sono *uguali* quando ogni elemento di A è anche elemento di B e viceversa. Si chiama *insieme vuoto* e si indica col simbolo $\varnothing$ un insieme che non contiene alcun elemento. Si dice che un insieme è *finito* quando contiene un numero finito di elementi. Tale numero prende il nome di CARDINALE di A e si indica col simbolo $|A|$ oppure card(A)[2]. Nel caso contrario si dice che A è *infinito*. Una definizione più rigorosa di insieme finito sarà data in 1.3.

Per individuare un insieme finito si può usare la *rappresentazione tabulare*, indicando entro parentesi graffe tutti gli elementi che lo compongono; per esempio, $\{a, b, d\}$, $\{10\}$ oppure $\{1, 3, 5, 7\}$. In particolare un insieme composto da un solo elemento si dice anche *singoletto* (*singleton* in inglese).
Per individuare un insieme infinito possono indicarsi alcuni suoi elementi che consentono di definire la *legge di formazione* dell'insieme considerato. Per esempio, $\{0, 1, 2, ..., n, ...\}$, $\{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ..., \pm 2n, ...\}$, $\{1, 2, 4, 16, ..., 2^n, ...\}$.

Esempi

1. Dato l'insieme $A = \{2, 4, 6\}$ si può affermare che $2 \in A$ e che $8 \notin A$.

2. Siano $A = \{1, 7, 3, 4\}$; B = {gli studenti iscritti al primo anno di un corso di laurea}; C = {studenti presenti in un'aula}; D = {punti di una retta di un piano euclideo}.
Gli insiemi A, B, C sono finiti e in particolare card(A) = 4, mentre l'insieme D è infinito.

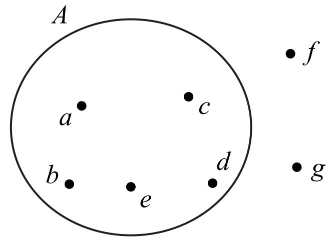
Una rappresentazione di un insieme frequentemente usata è quella mediante un *diagramma di Eulero-Venn*: gli elementi appartenenti all'insieme considerato vengono indicati con dei punti all'interno di una regione piana delimitata da una linea chiusa (Figura 1).

Spesso un insieme A può essere individuato in base ad una *proprietà caratteristica*, goduta da un suo elemento qualsiasi, fissata la quale è possibile stabilire inequivocabilmente se un elemento appartiene o no all'insieme A. Per esempio $\{x \mid x = 2n$, con n numero naturale$\}$, $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 3\}$, dove $\mathbf{R}$ indica l'insieme dei numeri reali (vedi Cap. 2), $\{x \mid x$ studente iscritto ad un corso di laurea$\}$. La proprietà "studente diligente iscritto ad un corso di laurea" non consente di individuare un insieme, perché la qualità "diligente" non è oggettiva e non consente di stabilire

[2] Si pone card ($\varnothing$) = 0.

in maniera inequivocabile se un elemento appartiene o meno a tale "insieme". Esistono altre tipologie di insiemi, ad esempio insiemi *fuzzy*, insiemi *rough*, ... molto interessanti per le loro applicazioni, ma la cui trattazione esula da questo manuale.

Figura 1. – $A = \{a, b, c, d, e\}$; $f, g \notin A$



Dati due insiemi A e B si dice che B è un SOTTOINSIEME di A oppure *B è contenuto* in A oppure *A include B* e si scrive $B \subseteq A$ se ogni elemento di B è *anche* elemento di A; in altri termini l'appartenenza di x a B comporta che x appartiene anche ad A, ossia $x \in B \Rightarrow x \in A$.

In relazione all'inclusione si possono presentare tre casi:

1. $A = B$ "*A coincide* con *B*" $\Leftrightarrow$ ($A \subseteq B$ e $B \subseteq A$).
2. $B \subset A$ "*B incluso strettamente* in *A*" $\Leftrightarrow A \subseteq B$ ed $\exists x \in A \mid x \notin B$.
3. $B = \emptyset$.

Nei casi 1. e 3. B dicesi sottoinsieme IMPROPRIO di A, mentre nel caso 2. B dicesi sottoinsieme PROPRIO di A; ad esempio, l'insieme dei numeri pari **P** (denotato talvolta anche con 2**N**) è un sottoinsieme proprio dell'insieme dei numeri naturali **N** (vedi Cap. 2), perché un qualunque numero dispari appartiene ad **N** ma non a **P**.

Esempio

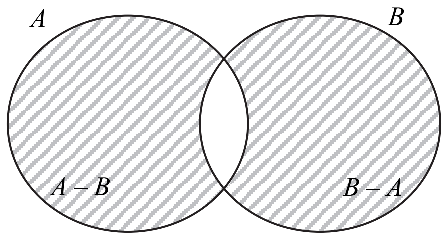
2. A = {poligoni}; B = {triangoli}; C = {triangoli con tre angoli retti}. Si osservi che B è un sottoinsieme proprio di A mentre C, insieme vuoto, è un sottoinsieme improprio sia di A che di B.

Dati due insiemi A e B, dicesi DIFFERENZA tra A e B, e si scrive $A \backslash B$ oppure $A - B$, l'insieme degli elementi di A che *non* appartengono a B (Figura 2), e in simboli si può scrivere:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Nel caso in cui $B \subseteq A$, $A - B$ si chiama il COMPLEMENTO di B in A e si scrive $C_A(B)$ oppure $\overline{B}$.

Figura 2. – **Differenza** tra A e B



Dati due insiemi A e B non vuoti, si definisce PRODOTTO CARTESIANO di A per B, e si indica con $A \times B$, l'insieme che ha per elementi tutte le *coppie ordinate* (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$, ossia $\{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$; a e b si chiamano *coordinate* del punto (a, b).

Se A e B sono non vuoti e diversi tra loro, risulta:

$$A \times B \neq B \times A,$$

ossia il prodotto cartesiano di due insiemi non gode della proprietà commutativa, perché $(a, b) \neq (b, a)$, in quanto $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$. Si osservi, pertanto, che $\{a, b\} = \{b, a\}$, mentre $(a, b) \neq (b, a)$.

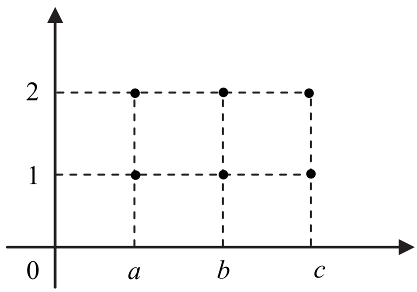
Nel caso in cui $B = A$, il prodotto $A \times A$ si chiama QUADRATO CARTESIANO di A e si indica con A^2.

Si pone per convenzione $A \times \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \times A = \varnothing$, $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$.

Se A e B sono finiti, risulta $|A \times B| = |A||B|$.

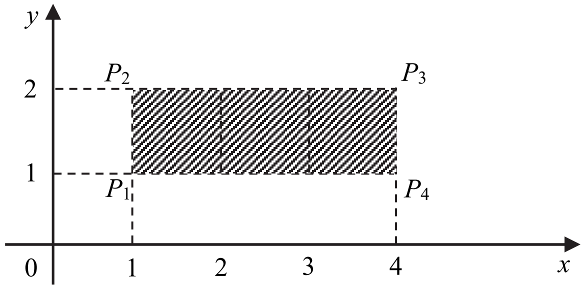
Ad esempio, se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$, si ha $A \times B = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$ e $B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$. Inoltre, poiché $|A| = 3$ e $|B| = 2$, si ha $|A \times B| = |B \times A| = 6$ (Figura 3, nell'ipotesi che a, b, c siano numeri reali con $a < b < c$).

Figura 3. – **Prodotto cartesiano** di $A = \{a, b, c\}$ per $B = \{1, 2\}$



Ancora: $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \le x \le 4\}$, $B = \{y \in \mathbf{R} \mid 1 \le y \le 2\}$; $A \times B$ è costituito dai punti del rettangolo di vertici P_1, P_2, P_3, P_4 in Figura 4.

Figura 4. – **Prodotto cartesiano** di $A = \{x \in \mathrm{R} \mid 1 \le x \le 4\}$ per $B = \{y \in \mathrm{R} \mid 1 \le x \le 2\}$



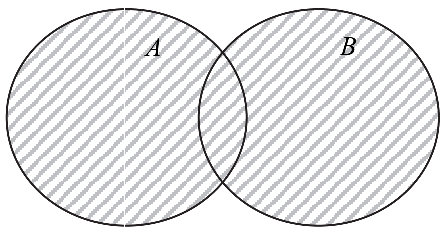
Dati due insiemi A e B, si chiama UNIONE o SOMMA LOGICA di A e B l'insieme formato dagli elementi che appartengono *ad almeno uno* dei due insiemi A e B (Figura 5); tale insieme si indica con $A \cup B$ che si legge "*A unione B*" e in simboli si può scrivere

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

dove $\vee$ è un *connettivo logico* che si legge "*oppure*" ed ha il significato di "vel" (e/o) (disgiunzione *inclusiva*) e non di "aut" (disgiunzione *esclusiva*).

Si considerino le seguenti affermazioni: "*Al bando Erasmus possono partecipare gli studenti in possesso di una certificazione di Inglese oppure di Francese*" e "*Un insieme è finito oppure infinito*". Nel primo caso, la partecipazione al bando Erasmus è riservata agli studenti che abbiano almeno una certificazione di Inglese o Francese. Tuttavia, non viene escluso il fatto che uno studente possa avere la certificazione di entrambe le lingue (disgiunzione inclusiva). Nel secondo caso, invece, non esiste un insieme che sia contemporaneamente finito e infinito e, quindi, si può verificare solamente uno dei due casi (disgiunzione esclusiva). Tale distinzione tra "vel" ed "aut" è fondamentale parlando delle relazioni binarie in 1.4.

Figura 5. – **Unione** di due insiemi (A e B)

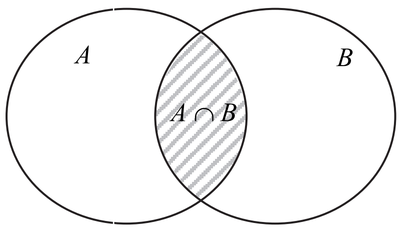


Si chiama INTERSEZIONE O PRODOTTO LOGICO di A e B l'insieme formato dagli elementi che appartengono *sia ad A che a B* (Figura 6); si indica tale insieme con $A \cap B$ che si legge "*A intersezione B*" e in simboli si può scrivere:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

dove $\wedge$ è un connettore logico che si legge "*e*".

Figura 6. – **Intersezione** di due insiemi (A e B)



Due insiemi A e B si dicono DISGIUNTI quando è

$$A \cap B = \varnothing.$$

Ad esempio, l'insieme dei numeri pari e quello dei numeri dispari sono disgiunti.

Le operazioni di unione e intersezione tra insiemi godono delle seguenti proprietà: $\forall A$, B e C

commutativa: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
associativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) =$
$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$
idempotenza: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;
assorbimento: $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$; $A \subseteq (A \cup B)$ e $B \subseteq (A \cup B)$;
$(A \cap B) \subseteq A$ e $(A \cap B) \subseteq B$

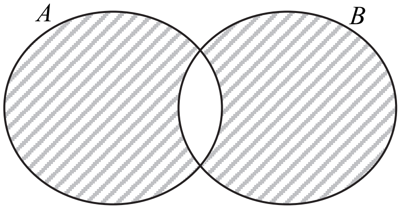
del *complementare* o di *De Morgan*:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Si chiama DIFFERENZA SIMMETRICA di A e B e si indica con $A \Delta B$ l'unione della differenza tra A e B e della differenza tra B e A (Figura 7), ossia:

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A).$$

Figura 7. – **Differenza simmetrica** di due insiemi (A e B)



La differenza simmetrica può definirsi in maniera equivalente come la differenza tra l'unione e l'intersezione di A e B, cioè:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Esempio

3. $A = \{a, b, c, d, e\}$; $B = \{a, b, e, f, g\}$; $C = \{a, b, c\}$; $D = \{e, f, g\}$; $E = \{a, e\}$; si osservi che $C \subset A$ e si ha:

$$\begin{aligned}
A - B &= \{c, d\}; \quad A - C = C_A(C) = \overline{C} = \{d, e\} \text{ (complemento di } C \text{ in } A); \\
&\quad C - D = \{a, b, c\} \\
A \cup B &= \{a, b, c, d, e, f, g\}; \quad C \cup D = \{a, b, c, e, f, g\}; \quad A \cup \varnothing = A; \\
A \cap B &= \{a, b, e\}; \quad C \cap D = \varnothing; \; B \cap \varnothing = \varnothing; \\
C \times E &= \{(a, a), (a, e), (b, a), (b, e), (c, a), (c, e)\}; \\
E \times C &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (e, a), (e, b), (e, c)\}; \\
E^2 &= \{(a, a), (a, e), (e, a), (e, e)\}; \\
C \times \varnothing &= \varnothing; \quad \varnothing \times C = \varnothing; \\
A \Delta B &= (A - B) \cup (B - A) = \{c, d\} \cup \{f, g\} = (A \cup B) - (A \cap B) = \\
&= \{a, b, c, d, e, f, g\} - \{a, b, e\} = \{c, d, f, g\}.
\end{aligned}$$

Nel caso in cui A e B sono finiti risulta (*Teorema dei quattro cardinali*):

[1] $$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Il teorema ha un'immediata interpretazione, poiché, supponendo che $A \cap B \neq \varnothing$, gli elementi che appartengono all'intersezione vengono "contati" due volte ovvero sia quando si calcola $|A|$ che quando si calcola $|B|$. Pertanto a $|A| + |B|$ bisogna sottrarre il numero di elementi che stanno nell'intersezione, ovvero $|A \cap B|$. Nel caso particolare in cui i due insiemi sono disgiunti, allora $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Questo teorema può estendersi considerando anche un numero k ($k \geq 2$) qualunque di insiemi. Per esempio, nel caso di tre insiemi A, B e C, si ha:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| +$$
$$- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Esempio

4. In aula ci sono 60 studenti che parlano l'inglese, 30 che parlano il francese e 10 che conoscono entrambe le lingue. Quanti sono gli studenti che parlano almeno una delle due suddette lingue straniere?

Denotando con A l'insieme degli studenti che parlano l'inglese e con B l'insieme di quelli che parlano Francese, si richiede pertanto il cardinale dell'unione di tali insiemi, ovvero $|A \cup B|$. Ricordando la [1] (Teorema dei quattro cardinali) si ha: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ e, quindi, $|A \cup B| = 60 + 30 - 10 = 80$.

Dato un insieme A, si chiama INSIEME DELLE PARTI e si denota con $\mathscr{P}(A)$, la famiglia costituita da tutti i sottoinsiemi di A, inclusi l'insieme vuoto e A stesso. Formalmente,

$$\mathscr{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

Ad esempio, se $A = \{a, b, c\}$, si ha: $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$[3].

Si osservi che $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ e $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Valgono le seguenti proprietà:

– se A è finito, $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$;
– $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$, $\mathscr{P}(A \cup B) \supseteq \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

Si osservi che $\mathscr{P}(A \cup B) \subseteq \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$ non è sempre vera. Ad esempio, se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, c, d\}$, si ha $A \cup B = \{a, b, c, d\}$ e, pertanto, $\{a, b, d\} \in \mathscr{P}(A \cup B)$, ma $\{a, b, d\} \notin \mathscr{P}(A)$ e $\{a, b, d\} \notin \mathscr{P}(B)$ e, quindi, $\{a, b, d\} \notin \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

1.3. *Applicazioni*

Dati due insiemi A e B non vuoti, si chiama APPLICAZIONE φ di A in B (o su B) una corrispondenza che associa ad *ogni* elemento $x \in A$ *uno ed uno solo* elemento $y \in B$ e si scrive:

$$\varphi : A \to B.$$

Un'applicazione φ di A in B si chiama anche FUNZIONE definita in A ed a valori in B e si scrive anche

$$y = \varphi(x)$$

e y si chiama *valore*, *immagine* o *trasformato* di x mediante la φ.

---

[3] Si osservi che le notazioni a e $\{a\}$ sono diverse, in quanto la prima rappresenta un elemento di un insieme, mentre la seconda rappresenta un insieme composto dal solo elemento a.

Nel caso in cui φ associa ad *un* elemento di A più elementi dell'insieme B, allora φ non si chiama funzione ma *multifunzione*, la cui trattazione però esula da questo manuale.

Un'applicazione si dice INIETTIVA quando ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B, ossia,

$$\forall x, y \in A, x \neq y \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y).$$

Se l'applicazione φ è tale per cui ogni elemento di B è il corrispondente di qualche elemento di A, allora si parla di applicazione di A SU TUTTO B o di applicazione SURIETTIVA, ossia

$$\forall b \in B, \exists\, a \in A : \varphi(a) = b.$$

In altri termini, un'applicazione è iniettiva se ogni elemento di B è al più immagine di un solo elemento di A ed è suriettiva se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A.

Si osservi che le proprietà di una applicazione di essere iniettiva e suriettiva sono indipendenti, cioè, come si vede dai successivi esempi, si possono avere tutti e quattro i casi possibili:

1. applicazioni non iniettive e non suriettive. Per esempio, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e φ: $A \to B$ tale che $\varphi(a) = \varphi(b) = 1$ e $\varphi(c) = 2$ (Figura 8); φ non è iniettiva in quanto elementi distinti di A (a e b) hanno la stessa immagine (1); φ non è suriettiva in quanto l'elemento $3 \in B$ non è immagine di alcun elemento di A;
2. applicazioni iniettive ma non suriettive. Per esempio, $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e φ: $A \to B$ tale che $\varphi(a) = 1$ e $\varphi(b) = 2$ (Figura 9);
3. applicazioni suriettive ma non iniettive. Per esempio, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ e φ: $A \to B$ tale che $\varphi(a) = \varphi(b) = 1$ e $\varphi(c) = 2$ (Figura 10);
4. applicazioni iniettive e suriettive. Per esempio, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e φ: $A \to B$ tale che $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 2$ e $\varphi(c) = 3$ (Figura 11).

Figura 8. – Applicazione né iniettiva né suriettiva

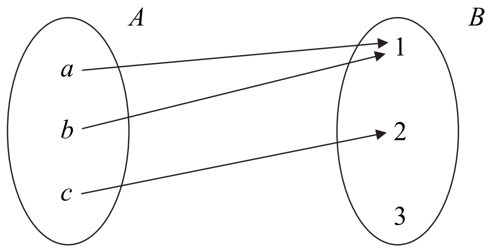


Figura 9. – Applicazione iniettiva ma non suriettiva

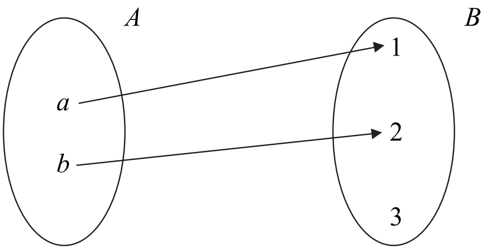


Figura 10. – Applicazione non iniettiva ma suriettiva

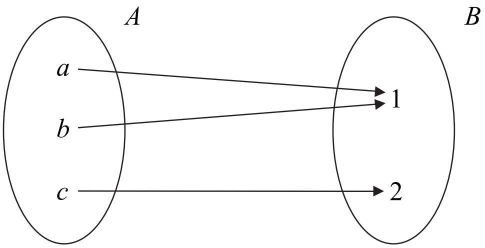
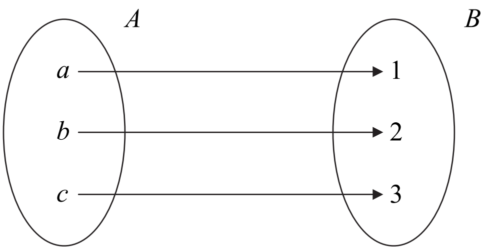


Figura 11. – Applicazione iniettiva e suriettiva (biunivoca)



Un'applicazione iniettiva e suriettiva di A su tutto B si chiama CORRISPONDENZA BIUNIVOCA tra A e B. Si osservi che in una corrispondenza biunivoca ogni elemento di B è immagine di un solo elemento di A. In questo caso, dato $y = \varphi(x)$, si dice che x è la *contro immagine* di y tramite la funzione φ.

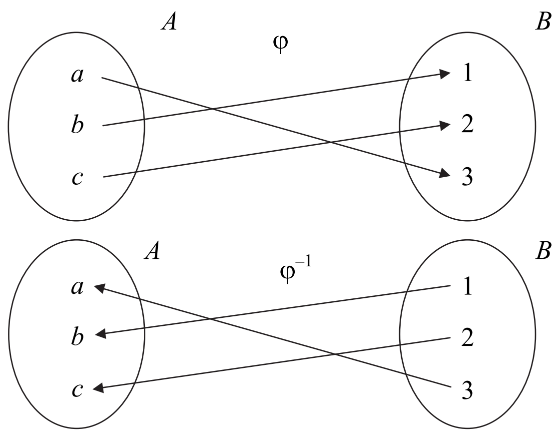
Se φ è un'applicazione iniettiva e suriettiva di A su B, ossia realizza una corrispondenza biunivoca tra A e B, si può definire un'applicazione, chiamata

APPLICAZIONE INVERSA di φ. Tale applicazione, che si indica con φ^{-1}, è definita in B ed ha valori in A ($\varphi^{-1} : B \to A$) ed è tale che ad ogni elemento $b \in B$ associa l'elemento $a \in A$ tale per cui $\varphi(a) = b$. Formalmente

[2] $$\varphi^{-1}: B \to A \ \text{ e}, \quad \forall\, b \in B, \varphi^{-1}(b) = a \mid \varphi(a) = b.$$

Per esempio, l'applicazione $\varphi: A \to B$, con $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $\varphi(a) = 3$, $\varphi(b) = 1$ e $\varphi(c) = 2$ è una corrispondenza biunivoca e la sua inversa $\varphi^{-1}: B \to A$ è tale che $\varphi^{-1}(1) = b$, $\varphi^{-1}(2) = c$ e $\varphi^{-1}(3) = a$ (Figura 12).

Figura 12. – Applicazione inversa



Si osserva in dettaglio perché l'applicazione inversa φ^{-1} può essere definita solamente se φ è un'applicazione biunivoca. Ad esempio, la funzione $\varphi: A \to B$ con $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e tale che $\varphi(a) = \varphi(b) = 1$ e $\varphi(c) = 2$ (Figura 8) non è biunivoca. In questo caso non si può definire φ^{-1} poiché, seguendo la [2], $\varphi^{-1}(1) = \{a, b\}$ (poiché sia a che b hanno come immagine tramite la funzione φ l'elemento 1) e, quindi, φ^{-1} sarebbe una multifunzione. Inoltre, φ non è suriettiva, in quanto non esiste alcun elemento di A che abbia per immagine $3 \in B$. Quindi, φ^{-1} non può assegnare all'elemento 3 alcun elemento dell'insieme A e, pertanto, non può essere un'applicazione di B in A.

Esempi

1. L'applicazione $\varphi: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ definita dalla legge $\varphi(n) = n^2$, $n \in \mathbf{N}$, è iniettiva perché a numeri interi distinti corrispondono quadrati distinti, ma non è suriettiva perché non tutti i numeri reali sono dei quadrati.

2. L'applicazione $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita dalla legge $\varphi(x) = 2x$, $x \in \mathbf{R}$, è iniettiva e suriet-

tiva, perché se $x \neq y$, anche $2x \neq 2y$ e ogni numero reale è immagine di un altro numero reale (la sua metà); essa, quindi, realizza una corrispondenza biunivoca tra **R** e **R**.

Si osservi che, dalla definizione [2] di applicazione inversa segue

$$\varphi[\varphi^{-1}(b)] = b \quad \text{e} \quad \varphi^{-1}[\varphi(a)] = a, \forall a \in A \quad \text{e} \quad \forall b \in B.$$

Introdotto il concetto di corrispondenza biunivoca, può definirsi rigorosamente il concetto di CARDINALE *di un insieme finito*. Sia $\mathbf{M} = \{1, 2, 3, ..., m\} \subset \mathbf{N}$, e sia $A \neq \emptyset$; se $\varphi: A \to \mathbf{M}$ realizza una corrispondenza biunivoca tra A e $\mathbf{M}$, l'insieme A si dice finito ed il numero m degli elementi di $\mathbf{M}$ si chiama cardinale di A, ossia $\text{card}(A) = m$.

Ad esempio, l'insieme $A = \{a, b, c\}$ ha cardinalità 3, poiché dato $\mathbf{M} = \{1, 2, 3\}$, la funzione $\varphi : A \to \mathbf{M}$ tale che $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 2$ e $\varphi(c) = 3$ è una corrispondenza biunivoca di A su $\mathbf{M}$. Lo stesso insieme A non può avere cardinalità 4, poiché non si può costruire alcuna corrispondenza biunivoca tra l'insieme A e l'insieme $\mathbf{M} = \{1, 2, 3, 4\}$, in quanto una qualsiasi funzione $\varphi : A \to \mathbf{M}$ non può mai essere suriettiva (almeno un elemento di $\mathbf{M}$ non è immagine di alcun elemento di A).

1.4. *Relazioni binarie*

Dati due insiemi non vuoti A e B, può essere utile associare elementi appartenenti ad A con elementi appartenenti a B, tenendo conto del loro ordine, ossia considerando *coppie* (a, b), con $a \in A$ e $b \in B$. Per esempio, se A è l'insieme degli studenti iscritti ad un corso di laurea e B è l'insieme delle materie del suo piano di studi, si può associare ad ogni studente le materie di cui ha superato gli esami.

Si chiama RELAZIONE di A in B un qualunque *sottoinsieme* R del prodotto cartesiano $A \times B$; si dice in tal caso che "*a è in relazione R con b*" e si scrive $aRb \Leftrightarrow (a, b) \in R \subseteq A \times B$. Si osservi che ogni applicazione $\varphi: A \to B$ è anche una relazione di A in B, ma non viceversa, perché per le relazioni non è richiesto di associare ogni elemento di A ad uno ed uno solo elemento di B, condizione invece richiesta per le applicazioni.

Esempi

1. Siano $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{\alpha, \beta\}$. Una possibile relazione di A in B può essere la seguente $R = \{(a, \alpha), (b, \alpha), (b, \beta), (c, \alpha), (c, \beta)\} \subset A \times B$.

2. Siano $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$; $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\} = \{(2, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4)\} \subset A \times B$.

Un caso particolarmente interessante di relazione tra insiemi è quello di una relazione in cui $B = A$.

Dato un insieme A, si chiama RELAZIONE BINARIA definita su A un qualunque sottoinsieme R di $A \times A$ e, se $(a, b) \in R$, si dice che "*a sta nella relazione R con b*" e si scrive:

$$aRb \Leftrightarrow (a, b) \in R \subseteq A \times A.$$

Per esempio, si considera la legge che associa ad ogni studente (di A) tutti gli studenti (di A) che sono nati nella sua stessa città. Allora, essendo il prodotto cartesiano $A \times A$ composto da tutte le coppie ordinate degli studenti considerati, si può definire la relazione

$$R = \{(a, b) \in A \times A : a \text{ è nato nella stessa città di } b\}.$$

Ovviamente, $R \subseteq A \times A$ e, pertanto, è una relazione binaria su A. Si osservi come la stessa relazione binaria R su A può essere definita specificando sotto quale condizione l'elemento $a \in \mathrm{A}$ è in relazione con l'elemento $b \in \mathrm{A}$ come segue:

$$aRb \Leftrightarrow a \text{ è nato nella stessa città di } b.$$

Si enunciano adesso alcune delle principali proprietà delle relazioni binarie. Si dice che una relazione binaria R è:

1. RIFLESSIVA, se aRa, $\forall a \in A$;

per esempio, la relazione di inclusione $\subseteq$ tra insiemi (ma non la relazione di inclusione stretta $\subset$) definita sull'insieme delle parti di X è riflessiva, perché $Y \subseteq Y$, $\forall Y \in \mathscr{P}(X)$.

Dato l'insieme **N** dei numeri naturali, la relazione R su **N** definita da

$$aRb \Leftrightarrow a \cdot b \text{ è pari} \qquad [3]$$

non gode della proprietà riflessiva, in quanto se a è pari, allora aRa (il quadrato di un numero pari è pari), mentre se a è dispari, allora $non(aRa)$ (il quadrato di un numero dispari è dispari, quindi non è pari). Pertanto, non si verifica che aRa, $\forall a \in A$;

2. SIMMETRICA, se $aRb \Rightarrow bRa$, $\forall a, b \in A$;

per esempio, la relazione di perpendicolarità definita nell'insieme delle rette del piano. La relazione di > definita sull'insieme dei numeri reali non è, invece, simmetrica in quanto $a>b \nRightarrow b>a$.

3. ASIMMETRICA, se $aRb \Rightarrow non(bRa)$, $\forall a, b \in A$;

per esempio, la relazione > definita sull'insieme dei numeri reali. La relazione [3] non è asimmetrica in quanto se $a \cdot b$ è pari, allora anche $b \cdot a$ è pari.

4. ANTISIMMETRICA, se aRb e $bRa \Rightarrow a = b$, $\forall a, b \in A$;

per esempio, la relazione ≤ definita sull'insieme dei numeri reali. La relazione [3] non è antisimmetrica in quanto, per esempio, $2R4$ e $4R2$ ma ciò non implica che $2 = 4$.

Si osservi che la proprietà antisimmetrica può scriversi anche

$$aRb \Rightarrow non(bRa),\ \forall a, b \in A \text{ tale che } a \neq b.$$

5. TOTALE O COMPLETA, se aRb e/o bRa, $\forall a, b \in A$, con $a \neq b$;
per esempio, la relazione $>$ tra numeri naturali è una relazione completa in quanto, dati due numeri naturali distinti a e b, si verifica sempre che $a > b$ (aRb) oppure (disgiunzione inclusiva) $b > a$ (bRa); la relazione di inclusione $\subseteq$ tra insiemi definita sull'insieme delle parti di X, con $|X| \geq 2$, non è completa. Ad esempio, se $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b\}$ e $Z = \{b, c\}$, non risulta né $Y \subseteq Z$ né $Z \subseteq Y$, pur essendo $Y \in \mathscr{P}(X)$ e $Z \in \mathscr{P}(X)$.

6. FORTEMENTE COMPLETA, se aRb e/o bRa, $\forall a, b \in A$,
ossia, deve valere almeno una delle relazioni aRb o bRa, comunque si confrontano due elementi (distinti o meno) di A. Per esempio, la relazione $\geq$ definita sull'insieme dei numeri reali è fortemente completa e quindi anche completa. Come osservato precedentemente, la relazione $>$ tra numeri naturali è completa, però essa non è fortemente completa in quanto ogni elemento non è maggiore di se stesso.

Si osservi che la completezza forte implica la riflessività. Infatti, a differenza della proprietà di completezza che deve valere $\forall a, b \in A$, $a \neq b$, nella proprietà di completezza forte deve essere aRb e/o bRa, $\forall a, b \in A$ e, pertanto, anche quando $b = a$ deve essere aRa.

7. TRANSITIVA, se aRb e $bRc \Rightarrow aRc$, $\forall a, b, c \in A$;
per esempio, la relazione di parallelismo definita sull'insieme delle rette del piano è transitiva. La relazione [3] non è, invece, transitiva poiché per $a = 3$, $b = 2$ e $c = 5$ si ha aRb ($3 \cdot 2 = 6$ è pari) e bRc ($2 \cdot 5 = 10$ è pari) ma $non(aRc)$ ($3 \cdot 5 = 15$ è dispari).

Di interesse applicativo sono alcune relazioni binarie che godono di particolari proprietà. Se ne ricorda qualcuna.

Una relazione binaria R definita su un insieme A si chiama RELAZIONE DI EQUIVALENZA su A se gode delle proprietà *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*. Se R è una relazione di equivalenza su A, la CLASSE DI EQUIVALENZA individuata da $a \in A$, denotata con $C(a)$, è l'insieme di tutti gli elementi di A che sono in relazione con a, cioè

$$C(a) = \{b \in A \mid bRa\}.$$

L'insieme che ha come elementi le classi di equivalenza della relazione R in A si chiama INSIEME QUOZIENTE e si indica con A/R. Per esempio, la relazione di equivalenza R definita sull'insieme $A = \{x, y, w, z\}$ come segue:

$$R = \{(x, x), (x, w), (y, y), (y, z), (w, x), (w, w), (z, y), (z, z)\},$$

ha $C(x) = C(w) = \{x, w\}$ e $C(y) = C(z) = \{y, z\}$ e quindi $A/R = \{\{x, w\}, \{y, z\}\}$.

Esempi

3. Sia A l'insieme degli abitanti di una città. L'insieme

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ è più alto di } b \text{ con } a, b \in A\}$$