Claudio Mattalia

Corso di Matematica

Matematica Finanziaria

Giappichelli

Capitolo 1

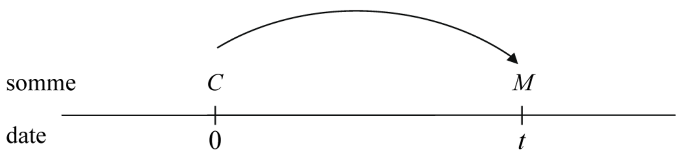
Calcolo finanziario

1.1. Capitalizzazione e attualizzazione

Il calcolo finanziario si occupa dello scambio tra somme di denaro disponibili ad epoche diverse, e prende in esame due tipi di operazioni:

- operazioni di capitalizzazione
- operazioni di attualizzazione

Un'operazione di capitalizzazione può essere considerata come un trasferimento di fondi in avanti nel tempo, e in questo caso si ha:



con:

$$\begin{aligned} C &= \text{capitale investito (somma impiegata)} \\ M &= \text{montante (somma riscossa)} \\ \frac{M}{C} &= f = \text{fattore di capitalizzazione (o di montante)} \\ M - C &= I = \text{interesse} \end{aligned}$$

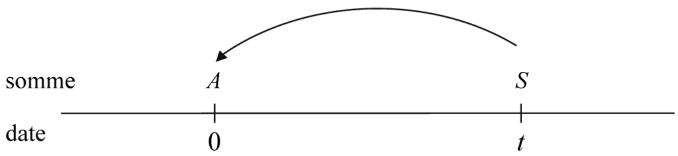
Di conseguenza, la relazione fondamentale tra montante e capitale investito è:

$$M = C \cdot f$$

e tenendo conto della definizione di interesse si ha anche:

$$I = M - C = C \cdot f - C = C \cdot (f - 1)$$

Un'operazione di attualizzazione, invece, può essere considerata come un trasferimento di fondi all'indietro nel tempo, e in questo caso si ha:



con:

$$\begin{aligned} S &= \text{valore nominale (somma futura)} \\ A &= \text{valore attuale (somma immediata)} \\ \frac{A}{S} &= \varphi = \text{fattore di attualizzazione (o di sconto)} \\ S - A &= D = \text{sconto} \end{aligned}$$

Di conseguenza, la relazione fondamentale tra valore attuale e valore nominale è:

$$A = S \cdot \varphi$$

e tenendo conto della definizione di sconto si ha anche:

$$D = S - A = S - S \cdot \varphi = S \cdot (1 - \varphi)$$

1.2. Regimi finanziari e leggi finanziarie

I fattori di scambio f e φ sopra introdotti vengono detti *fattori finanziari*. In genere, essi sono funzione del tempo t e di un parametro α o β (che prende il nome di tasso di interesse o tasso di sconto), per cui possono essere indicati con $f\,(t, \alpha)$ e $\varphi\,(t, \beta)$. Queste funzioni individuano i cosiddetti *regimi finanziari* (rispettivamente di capitalizzazione e di attualizzazione), mentre fissando il valore del parametro α o β si ottengono funzioni che dipendono solo dal tempo, $f(t)$ e $\varphi(t)$, le quali individuano le cosiddette *leggi finanziarie* (rispettivamente di capitalizzazione e di attualizzazione).

Due fattori finanziari f e φ si dicono coniugati quando vale la relazione:

$$f \cdot \varphi = 1$$

dalla quale si ottiene anche:

$$f = \frac{1}{\varphi} \qquad \varphi = \frac{1}{f}$$

Si definisce poi *tasso di interesse* l'interesse prodotto da una somma unitaria (ad esempio 1€) investita per un intervallo di tempo (il primo, quello che va da $t = 0$ a $t = 1$) di durata unitaria (ad esempio 1 anno):

$$I = M - C = 1 \cdot f(1) - 1 = i = \text{tasso di interesse}$$

mentre si definisce *tasso di sconto* il compenso trattenuto da chi anticipa una somma unitaria (ad esempio 1€) che scade dopo un intervallo di tempo (il primo, quello che va da $t = 0$ a $t = 1$) di durata unitaria (ad esempio 1 anno):

$$D = S - A = 1 - 1 \cdot \varphi(1) = d = \text{tasso di sconto}$$

Da queste definizioni si ricava:

$$f(1) = 1 + i \qquad \varphi(1) = 1 - d$$

e nel caso di fattori finanziari coniugati si ha la relazione:

$$f(1) \cdot \varphi(1) = 1$$

che può essere scritta nella forma:

$$(1 + i) \cdot (1 - d) = 1$$

dalla quale si ottiene:

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad i = \frac{d}{1-d}$$

che sono le relazioni che legano tasso di interesse i e tasso di sconto d (relativi a fattori finanziari coniugati).

I fattori finanziari f e φ possono essere calcolati in base ad opportune formule, dando origine a diversi regimi finanziari. In particolare, i regimi finanziari usuali sono 3:

- regime della capitalizzazione semplice (o dello sconto razionale)
- regime della capitalizzazione composta (o dello sconto composto)
- regime della capitalizzazione a interessi semplici anticipati (o dello sconto commerciale)

1.2.1. Capitalizzazione semplice

Il regime della capitalizzazione semplice è caratterizzato dal fatto che gli interessi sono proporzionali al capitale investito C e alla durata t dell'operazione, cioé si ha:

$$\frac{I}{Ct} = \alpha \Rightarrow I = Ct\alpha$$

dove α è una costante di proporzionalità (positiva). Ponendo $C = 1$ e $t = 1$ si ottiene:

$$I = \alpha$$

e quindi α rappresenta l'interesse prodotto da una somma unitaria investita per un intervallo di tempo di durata unitaria, cioè rappresenta il tasso di interesse (semplice) i. Si ha allora:

$$I = Cti$$

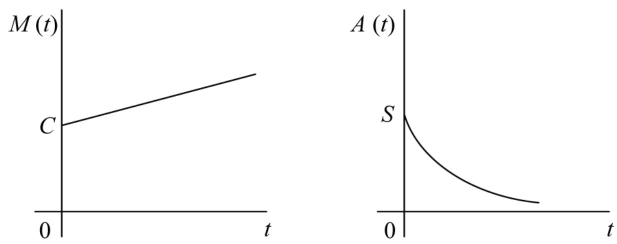
e poi anche:

$$M = C + I = C + Cti = C(1 + it)$$

da cui:

$$f(t,i) = 1 + it \qquad \varphi(t,i) = \frac{1}{1+it} \quad \text{e} \quad A = \frac{S}{1+it}$$

dove $f(t,i)$ è il fattore di capitalizzazione che individua il regime della capitalizzazione semplice, mentre $\varphi(t,i)$ è il fattore di attualizzazione coniugato di $f(t,i)$ ed individua il regime dello sconto razionale (o sconto semplice). Il tasso i rappresenta il tasso di interesse semplice, ed assegnando ad esso un particolare valore si individuano la legge di interesse semplice $f(t)$ e la legge di sconto razionale $\varphi(t)$ a quel determinato tasso di interesse. Graficamente, gli andamenti nel tempo del montante $M = M(t)$ e del valore attuale $A = A(t)$ sono dati da:



Esempio 1.1 *Calcolare il montante che si ottiene impiegando la somma di* 1000€ *per* 3 *anni, in regime di interessi semplici, al tasso annuo del* 10%.

Si ha in questo caso:

$$M = C(1 + it)$$

e poi:

$$M = 1000 \cdot (1 + 0.10 \cdot 3) = 1000 \cdot 1.3 = 1300$$

che rappresenta il montante cercato. Gli interessi, inoltre, sono dati da:

$$I = M - C = 1300 - 1000 = 300$$

Esempio 1.2 *Calcolare il valore attuale della somma di* 2600€ *disponibile tra* 2 *anni, in regime di sconto semplice, con tasso annuo di interesse del* 15%.

Si ha in questo caso:

$$A = \frac{S}{1+it}$$

e poi:

$$A = \frac{2600}{1 + 0.15 \cdot 2} = \frac{2600}{1.3} = 2000$$

che rappresenta il valore attuale cercato. Lo sconto, inoltre, è dato da:

$$D = S - A = 2600 - 2000 = 600$$

Nei calcoli considerati deve sempre esistere corrispondenza tra l'unità di misura utilizzata per il tasso e per il tempo: se il tasso di cui si dispone è un tasso annuo il tempo deve essere espresso in anni, se il tasso di cui si dispone è un tasso mensile il tempo deve essere espresso in mesi, e così via. A questo proposito, se i è un tasso di interesse annuo, si indica con i_m il tasso di interesse periodale relativo alla frazione di anno $\frac{1}{m}$ (ad es. i_2 è il tasso relativo a $\frac{1}{2}$ di anno, cioè il tasso semestrale, i_3 è il tasso relativo a $\frac{1}{3}$ di anno, cioè il tasso quadrimestrale, i_4 è il tasso relativo a $\frac{1}{4}$ di anno, cioè il tasso trimestrale, i_6 è il tasso relativo a $\frac{1}{6}$ di anno, cioè il tasso bimestrale, e i_{12} è il tasso relativo a $\frac{1}{12}$ di anno, cioè il tasso mensile). Un tasso di interesse periodale si dice equivalente ad un dato tasso annuo se, applicato alla stessa somma per lo stesso periodo di tempo (nello stesso regime) genera lo stesso montante (o lo stesso valore attuale). La relazione intercorrente tra questi tassi può essere determinata imponendo l'uguaglianza tra i fattori di capitalizzazione calcolati con tasso annuo e con tasso periodale, cioè:

$$1 + it = 1 + i_m mt$$

dove nel fattore di capitalizzazione con tasso periodale la durata dell'impiego è pari a mt poiché si deve avere corrispondenza tra unità di misura del tasso e del tempo (per cui, essendo il tasso i_m relativo alla frazione $\frac{1}{m}$ di anno, anche il tempo deve essere espresso in m-simi di anno). Si ottiene allora:

$$i_m = \frac{i}{m} \qquad\qquad i = m \cdot i_m$$

e i tassi i ed i_m si dicono *tassi equivalenti* (in regime di capitalizzazione semplice).

Esempio 1.3 *Calcolare il montante che si ottiene impiegando la somma di* 10000€ *per* 15 *mesi, in regime di interessi semplici, al tasso annuo del* 10%.

Si ha in questo caso:

$$M = C(1 + it)$$

e poi (tenendo presente che deve esserci corrispondenza tra unità di misura del tasso e del tempo - per cui, essendo il tasso annuo, anche il tempo deve essere espresso in anni -):

$$M = 10000 \cdot \left(1 + 0.10 \cdot \frac{15}{12}\right) = 10000 \cdot 1.125 = 11250$$

che rappresenta il montante cercato. Gli interessi, inoltre, sono dati da:

$$I = M - C = 11250 - 10000 = 1250$$

In alternativa è possibile calcolare prima il tasso di interesse mensile equivalente al tasso annuo del 10%:

$$i_{12} = \frac{i}{12} = \frac{0.10}{12}$$

e poi (utilizzando il tasso mensile ed esprimendo il tempo in mesi):

$$M = 10000 \cdot \left(1 + \frac{0.10}{12} \cdot 15\right) = 10000 \cdot 1.125 = 11250$$

come trovato prima.

Esempio 1.4 *Calcolare il valore attuale della somma di* 15000€ *disponibile tra* 8 *mesi, in regime di sconto semplice, con tasso annuo di interesse del* 6%.

Si ha in questo caso:

$$A = \frac{S}{1 + it}$$

e poi (esprimendo il tempo in anni, poiché il tasso di cui si dispone è annuo):

$$A = \frac{15000}{1 + 0.06 \cdot \dfrac{8}{12}} = \frac{15000}{1.04} = 14423.08$$

che rappresenta il valore attuale cercato. Lo sconto, inoltre, è dato da:

$$D = S - A = 15000 - 14423.08 = 576.92$$

In alternativa è possibile calcolare prima il tasso di interesse mensile equivalente al tasso annuo del 6%:

$$i_{12} = \frac{i}{12} = \frac{0.06}{12}$$

e poi (utilizzando il tasso mensile ed esprimendo il tempo in mesi):

$$A = \frac{15000}{1 + \dfrac{0.06}{12} \cdot 8} = \frac{15000}{1.04} = 14423.08$$

come trovato prima.

Esempio 1.5 *Calcolare, in regime di interessi semplici, il tasso trimestrale equivalente al tasso annuo del* 16%.

Si ha in questo caso:

$$i_m = \frac{i}{m}$$

e poi (osservando che il tasso trimestrale si riferisce ad $\frac{1}{4}$ di anno, per cui viene indicato con i_4):

$$i_4 = \frac{i}{4} \Rightarrow i_4 = \frac{0.16}{4} = 0.04$$

cioè il tasso di interesse trimestrale equivalente al tasso annuo del 16% è pari al 4%.

Esempio 1.6 *Calcolare, in regime di interessi semplici, il tasso annuo equivalente al tasso semestrale del* 5%.

Si ha in questo caso:

$$i = m \cdot i_m$$

e poi (osservando che il tasso semestrale si riferisce ad $\frac{1}{2}$ di anno, per cui viene indicato con i_2):

$$i = 2 \cdot i_2 \Rightarrow i = 2 \cdot 0.05 = 0.10$$

cioè il tasso di interesse annuo equivalente al tasso semestrale del 5% è pari al 10%.

1.2.2. Capitalizzazione composta

Il regime della capitalizzazione composta è caratterizzato dal fatto che gli interessi maturati in un periodo (attraverso il regime della capitalizzazione semplice) diventano capitale e, a loro volta, producono interessi a partire dal periodo successivo. Considerando intervalli di tempo di lunghezza unitaria il montante dopo un periodo è quindi:

$$M = C(1+i)$$

mentre dopo 2 periodi (tenendo presente che il montante del periodo precedente diventa il nuovo capitale) è:

$$M = [C\,(1+i)]\,(1+i) = C(1+i)^2$$

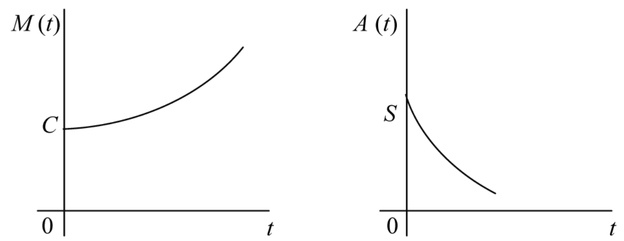
e, in generale, dopo t periodi è pari a:

$$M = C(1+i)^t$$

Si ha allora:

$$f(t,i) = (1+i)^t \qquad \varphi(t,i) = \frac{1}{(1+i)^t} = (1+i)^{-t} \quad \text{e} \quad A = S(1+i)^{-t}$$

dove $f(t,i)$ è il fattore di capitalizzazione che individua il regime della capitalizzazione composta, mentre $\varphi(t,i)$ è il fattore di attualizzazione coniugato di $f(t,i)$ ed individua il regime dello sconto composto. Il tasso i rappresenta il tasso di interesse composto, e può essere interpretato come tasso di interesse semplice con la convenzione che, alla fine di ogni periodo (cioè di ogni anno), gli interessi vengono capitalizzati. Anche in questo caso assegnando ad esso un particolare valore si individuano la legge di interesse composto $f(t)$ e la legge di sconto composto $\varphi(t)$ a quel determinato tasso di interesse. Graficamente, in questo caso, gli andamenti nel tempo del montante $M = M(t)$ e del valore attuale $A = A(t)$ sono dati da:



L'espressione utilizzata per il fattore di capitalizzazione (e di attualizzazione) si applica anche quando la durata dell'operazione è costituita da un numero di periodi t non intero (per semplificare i calcoli), e si parla in questo caso di convenzione esponenziale.

Esempio 1.7 *Calcolare il montante che si ottiene impiegando la somma di* 1000€ *per* 5 *anni, in regime di capitalizzazione composta, al tasso annuo dell'*8%.

Si ha in questo caso:

$$M = C(1+i)^t$$

e poi:

$$M = 1000 \cdot (1+0.08)^5 = 1000 \cdot 1.46933 = 1469.33$$

che rappresenta il montante cercato. Gli interessi, inoltre, sono dati da:

$$I = M - C = 1469.33 - 1000 = 469.33$$

Esempio 1.8 *Calcolare il valore attuale della somma di* 1000€ *disponibile tra* 3 *anni, in regime di sconto composto, con tasso annuo di interesse del* 7%.

Si ha in questo caso:

$$A = S(1+i)^{-t}$$

e poi:

$$A = 1000 \cdot (1+0.07)^{-3} = 1000 \cdot 0.81630 = 816.30$$

che rappresenta il valore attuale cercato. Lo sconto, inoltre, è dato da:

$$D = S - A = 1000 - 816.30 = 183.70$$

Anche in questo regime deve sempre esistere corrispondenza tra l'unità di misura utilizzata per il tasso e per il tempo. Se i è un tasso di interesse annuo, e i_m un tasso di interesse periodale (relativo alla frazione di anno $\frac{1}{m}$), inoltre, la relazione intercorrente tra di essi può essere determinata imponendo l'uguaglianza tra i fattori di capitalizzazione calcolati con tasso annuo e con tasso periodale, cioè:

$$(1+i)^t = (1+i_m)^{mt}$$

da cui si ottiene:

$$1 + i = (1+i_m)^m$$

e poi:

$$i_m = \sqrt[m]{1+i} - 1 \qquad i = (1+i_m)^m - 1$$

e i tassi i ed i_m si dicono *tassi equivalenti* (in regime di capitalizzazione composta). In questo caso si introduce inoltre un nuovo tasso, il tasso annuo nominale convertibile m volte l'anno j_m, che si ottiene semplicemente moltiplicando il tasso periodale per il numero dei periodi:

$$j_m = m \cdot i_m$$

Le formule di passaggio tra i (che viene anche detto tasso annuo effettivo, per distinguerlo dal tasso annuo nominale) e j_m, poi, sono date da:

$$j_m = m\left[\sqrt[m]{1+i} - 1\right] \qquad i = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m - 1$$

Esempio 1.9 *Calcolare il montante che si ottiene impiegando la somma di* 1000€ *per* 2 *anni e* 6 *mesi, in regime di capitalizzazione composta, al tasso annuo del* 10%.

Si ha in questo caso (assumendo la convenzione esponenziale, per cui il fattore di montante $(1+i)^t$ viene utilizzato anche per periodi di tempo t non interi):

$$M = C(1+i)^t$$

e poi (esprimendo il tempo in anni, poiché il tasso di cui si dispone è annuo):

$$M = 1000 \cdot (1+0.10)^{2+\frac{6}{12}} = 1000 \cdot (1.10)^{2.5} = 1000 \cdot 1.26906 = 1269.06$$

che rappresenta il montante cercato. Gli interessi, inoltre, sono dati da:

$$I = M - C = 1269.06 - 1000 = 269.06$$

In alternativa è possibile calcolare prima il tasso di interesse mensile equivalente al tasso annuo del 10%:

$$i_{12} = \sqrt[12]{1+i} - 1 = \sqrt[12]{1+0.10} - 1 = 0.00797$$

e poi (utilizzando il tasso mensile ed esprimendo il tempo in mesi):

$$M = 1000 \cdot (1+0.00797)^{30} = 1000 \cdot 1.26906 = 1269.06$$

come trovato prima.

Esempio 1.10 *Calcolare il valore attuale della somma di* 500€ *disponibile tra* 3 *anni e* 4 *mesi, in regime di sconto composto, con tasso annuo di interesse del* 9%.

Si ha in questo caso (assumendo la convenzione esponenziale, per cui il fattore di sconto $(1+i)^{-t}$ viene utilizzato anche per periodi di tempo t non interi):

$$A = S(1+i)^{-t}$$

e poi (esprimendo il tempo in anni, poiché il tasso di cui si dispone è annuo):

$$A = 500 \cdot (1+0.09)^{-\left(3+\frac{4}{12}\right)} = 500 \cdot (1.09)^{-3.33} = 500 \cdot 0.75031 = 375.16$$

che rappresenta il valore attuale cercato. Lo sconto, inoltre, è dato da:

$$D = S - A = 500 - 375.16 = 124.84$$

In alternativa è possibile calcolare prima il tasso di interesse mensile equivalente al tasso annuo del 9%:

$$i_{12} = \sqrt[12]{1+i} - 1 = \sqrt[12]{1+0.09} - 1 = 0.00720$$

e poi (utilizzando il tasso mensile ed esprimendo il tempo in mesi):

$$A = 500 \cdot (1+0.00720)^{-40} = 500 \cdot 0.75031 = 375.16$$

come trovato prima.

Esempio 1.11 *Calcolare, in regime di interessi composti, il tasso semestrale ed il tasso annuo nominale convertibile* 2 *volte l'anno equivalenti al tasso annuo del* 21%*.*

Si ha in questo caso:

$$i_m = \sqrt[m]{1+i} - 1 \qquad j_m = m \cdot i_m$$

e poi:

$$i_2 = \sqrt{1+i} - 1 \Rightarrow i_2 = \sqrt{1+0.21} - 1 = 0.10$$

$$j_2 = 2 \cdot i_2 \Rightarrow j_2 = 2 \cdot 0.10 = 0.20$$

cioè il tasso semestrale equivalente al tasso annuo del 21% è pari al 10% e il tasso annuo nominale convertibile 2 volte l'anno equivalente al tasso annuo del 21% è pari al 20%.

Esempio 1.12 *Calcolare, in regime di interessi composti, il tasso annuo effettivo ed il tasso annuo nominale convertibile* 12 *volte l'anno equivalenti al tasso mensile dell'*1%*.*

Si ha in questo caso:

$$i = (1+i_m)^m - 1 \qquad j_m = m \cdot i_m$$

e poi:

$$i = (1+i_{12})^{12} - 1 \Rightarrow i = (1+0.01)^{12} - 1 = 0.1268$$

$$j_{12} = 12 \cdot i_{12} \Rightarrow j_{12} = 12 \cdot 0.01 = 0.12$$

cioè il tasso annuo effettivo equivalente al tasso mensile dell' 1% è pari al 12.68% e il tasso annuo nominale convertibile 12 volte l'anno equivalente al tasso mensile dell'1% è pari al 12%.

Nel regime composto si può poi introdurre un caso limite, costituito dalla capitalizzazione continua o istantanea. Utilizzando il tasso j_m il fattore di capitalizzazione diventa:

$$f(t, j_m) = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{mt}$$

e ponendo $j_m = \delta$ e facendo tendere m a $+\infty$ (cioè considerando intervalli la cui ampiezza $\frac{1}{m}$ tende a 0, il che significa che la capitalizzazione avviene ogni istante) si ottiene (sfruttando il limite notevole $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$):

$$f(t, \delta) = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{\delta}{m}\right)^{mt} = e^{\delta t}$$

che rappresenta il fattore di montante nel caso di capitalizzazione continua (o istantanea). Il montante di una generica somma C è allora dato da:

$$M = Ce^{\delta t}$$

mentre il fattore di sconto e il valore attuale di una generica somma S sono dati da:

$$\varphi(t, \delta) = \frac{1}{e^{\delta t}} = e^{-\delta t} \qquad A = Se^{-\delta t}$$

Il tasso nominale δ si chiama tasso istantaneo di interesse (o intensità istantanea di interesse, o forza di interesse) e il legame con il tasso annuo effettivo i si ottiene uguagliando i fattori di capitalizzazione con tasso annuo e con tasso istantaneo, cioè:

$$(1 + i)^t = e^{\delta t}$$

da cui:

$$\delta = \log(1 + i) \qquad i = e^{\delta} - 1$$

Esempio 1.13 *Calcolare il montante che si ottiene impiegando la somma di* 2000€ *per* 2 *anni e* 10 *mesi, al tasso annuo del* 5%*, utilizzando la capitalizzazione continua.*

Si ha in questo caso:

$$M = Ce^{\delta t} \qquad \text{con } \delta = \log(1 + i)$$

e poiché:

$$\delta = \log(1 + 0.05) = 0.04879$$

si ottiene (esprimendo il tempo in anni, poiché il tasso di cui si dispone inizialmente è annuo):

$$M = 2000 \cdot e^{0.04879 \cdot \left(2+\frac{10}{12}\right)} = 2000 \cdot e^{0.138238} = 2000 \cdot 1.148249 = 2296.50$$

che rappresenta il montante cercato. Gli interessi, inoltre, sono dati da:

$$I = M - C = 2296.50 - 2000 = 296.50$$

Esempio 1.14 *Calcolare il valore attuale della somma di* 1000€ *disponibile tra* 3 *anni e* 6 *mesi, al tasso di interesse annuo del* 10%*, utilizzando la capitalizzazione continua.*

Si ha in questo caso:

$$A = Se^{-\delta t} \qquad \text{con } \delta = \log(1 + i)$$

e poiché:

$$\delta = \log(1 + 0.10) = 0.09531$$

si ottiene (esprimendo il tempo in anni, poiché il tasso di cui si dispone inizialmente è annuo):

$$A = 1000 \cdot e^{-0.09531 \cdot \left(3+\frac{6}{12}\right)} = 1000 \cdot e^{-0.333586} = 1000 \cdot 0.716350 = 716.35$$

che rappresenta il valore attuale cercato. Lo sconto, inoltre, è dato da:

$$D = S - A = 1000 - 716.35 = 283.65$$