Capitolo 1

Insiemi, applicazioni e sommatorie

1.1 Insiemi

1.1.1 Nozioni generali sugli insiemi

Il concetto di insieme è un concetto primitivo, sinonimo di collezione, aggregato, famiglia o classe. Gli insiemi si indicheranno con le lettere maiuscole dell'alfabeto $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$; gli elementi di un insieme saranno indicati, invece, con le lettere minuscole $a, b, \ldots, x, y, \ldots$. Se l'elemento a appartiene all'insieme A si scriverà $a \in A$; se invece l'elemento a non appartiene all'insieme A si scriverà $a \notin A$.

Nel seguito si utilizzeranno esclusivamente insiemi costituiti da numeri. Si ricorda che con $\mathbb{N}$ si indica l'insieme dei numeri interi, $1, 2, 3, \ldots$; con $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri relativi, $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$; con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali, costituito da tutte le possibili frazioni $\frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$, e con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, costituito dai razionali e dagli irrazionali, come ad esempio $\sqrt{2}$.

Esempio 1.1 *Dimostrare che* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Soluzione
Si supponga che, per assurdo, che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Dovranno allora esistere

$n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$, primi tra loro, tali che

$$\frac{n}{m} = \sqrt{2}.$$

Elevando al quadrato ambo i membri della precedente relazione, si ottiene:

$$2 = \frac{n^2}{m^2} \Rightarrow n^2 = 2 \cdot m^2, \tag{1.1}$$

il che dimostra che n^2 è pari. Se però ciò è vero, anche n deve essere pari e quindi si può porre $n = 2s$, $s \in \mathbb{N}$. Sostituendo quest'ultima relazione nell'equazione (1.1), si ottiene

$$(2s)^2 = 2m^2 \Rightarrow 4s^2 = 2m^2 \Rightarrow m^2 = 2s^2$$

e pertanto m^2 e, quindi, m sono pari. Se sia n che m sono pari, ciò contraddice l'ipotesi che essi siano primi tra loro. La contraddizione può essere evitata assumendo falsa l'ipotesi di partenza, e cioè assumendo che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1.1.2 Individuazione di un insieme

È possibile individuare un insieme elencandone gli elementi,

$$A = \{1, 3, 7, 81\},$$

oppure indicando la proprietà di cui godono gli elementi dell'insieme, come ad esempio (si utilizzerà il simbolo "|" a significare "tale che")

$$A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x = \text{numero pari}\},$$

che si legge "A è costituito da tutti i numeri interi x tali che x è un numero pari", ovvero

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}.$$

Esempio 1.2 *Elencare gli elementi dell'insieme*

$$A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x = 2n - 2, n \in \mathbb{N}\}.$$

Soluzione
L'insieme A è costituito da tutti quei numeri x che possono essere scritti come $2n-2$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 1$ si ha $x = 2 \cdot 1 - 2 = 0$, per $n = 2$ si ha $x = 2 \cdot 2 - 2 = 2$, per $n = 3$ si ha $x = 2 \cdot 3 - 2 = 4$, e così via. L'insieme A è costituito, quindi, dai numeri $0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ e cioè dai numeri pari compreso lo zero:

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10 \ldots\} .$$

Esempio 1.3 *Elencare gli elementi dell'insieme*

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 \leq 16\}.$$

Soluzione
L'insieme A è costituito da tutti quei numeri relativi il cui quadrato è minore o uguale a 16. Pertanto

$$A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} .$$

Esercizio 1.1 *Elencare gli elementi del seguente insieme*

$$A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x = 2k + 3, k \in \mathbb{N}\}.$$

Soluzione: $A = \{5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots\}$.

Esercizio 1.2 *Elencare gli elementi del seguente insieme*

$$B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 2x \leq 8\}.$$

Soluzione: $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Esercizio 1.3 *Elencare gli elementi del seguente insieme*

$$C = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x^2 \leq 25\}.$$

Soluzione: $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Esercizio 1.4 *Elencare gli elementi del seguente insieme*

$$D = \left\{ x \in \mathbb{Q} \,|\, x = \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Soluzione: $D = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \right\}$.

Esercizio 1.5 *Usando lo stesso procedimento visto per dimostrare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (si veda l'esempio 1.1), si dimostri che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.*

1.1.3 Sottoinsiemi

Se tutti gli elementi dell'insieme A appartengono ad un insieme "più grande" B, si dirà che l'insieme A è contenuto nell'insieme B (in simboli $A \subseteq B$). L'insieme che non contiene alcun elemento è detto insieme vuoto ed è indicato con $\emptyset$. Per definizione si assumerà che l'insieme vuoto sia sottoinsieme di ogni altro insieme. Se A è un sottoinsieme di B, ma $A \neq B, \emptyset$, si dirà che A è un sottoinsieme proprio di B: in simboli $A \subset B$.

Esempio 1.4 *Sia P l'insieme dei numeri interi pari: $P = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Chiaramente $P \subset \mathbb{N}$ e, quindi, esso è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$.*

1.1.4 Operazioni tra insiemi

Si ricorda che si dice unione tra gli insiemi A e B, e si indica con $A \cup B$, l'insieme degli elementi che appartengono ad A oppure B:

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ oppure } x \in B\}.$$

Proprietà:

- $A \cup B = B \cup A$;
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
- $A \cup \emptyset = A$;
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$.

Esempio 1.5 *Siano* $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{0, 1, 3\}$ *e* $C = \{3, 5, 7\}$. *Si ha:*

$$A \cup B = \{0, 2, 4, 1, 3\}\,, \; A \cup C = \{0, 2, 4, 3, 5, 7\}\,, \; B \cup C = \{0, 1, 3, 5, 7\}\,.$$

Si ricorda che si dice intersezione tra gli insiemi A e B, e si indica con $A \cap B$, l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A sia B:

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ e } x \in B\}\,.$$

Proprietà:

- $A \cap B = B \cap A$;
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
- $A \cap \emptyset = \emptyset$;
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.

Esempio 1.6 *Siano* $A = \{-2, 0, 9\}$, $B = \{0, 2, 7, 9, 11\}$ *e* $C = \{1, 3, 11\}$. *Si ha:*

$$A \cap B = \{0, 9\}\,, \; A \cap C = \emptyset, \; B \cap C = \{11\}\,.$$

La relazione tra le operazioni di unione e intersezione è data dalla seguente proprietà:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,.$$

Si ricorda che si dice differenza tra A e B, e si indica con $A \setminus B$, l'insieme degli elementi di A che non appartengono anche a B:

$$A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \text{ e } x \notin B\}\,.$$

Esempio 1.7 *Siano* $A = \{-3, 2, 8\}$, $B = \{1, 2, 9\}$ *e* $C = \{1, 2, 9, 12\}$.

Si ha:

$$
\begin{aligned}
A \setminus B &= \{-3, 8\} \\
B \setminus A &= \{1, 9\} \\
A \setminus C &= \{-3, 8\} \\
C \setminus A &= \{1, 9, 12\} \\
B \setminus C &= \emptyset \\
C \setminus B &= \{12\}
\end{aligned}
$$

Osservazione 1.1 *Si può avere $A \setminus B = A$ anche se B non è vuoto, e $A \setminus B = \emptyset$ anche se $A \neq B$ (notare la mancata analogia con la sottrazione numerica).*

Siano A e B due insiemi. Si ricorda che si dice prodotto cartesiano di A con B l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b), al variare di $a \in A$ e $b \in B$. Esso si indica con i simboli $A \times B$. Se $A = B$ si usa la notazione $A \times A = A^2$.

Esempio 1.8 *Siano $A = \{1, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$. Il prodotto cartesiano $A \times B$ è dato dall'insieme:*

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\},$$

mentre il prodotto $B \times A$ è dato dall'insieme:

$$B \times A = \{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 3)\}.$$

Come si può osservare i due prodotti non coincidono.

1.1.5 Insieme complementare

Sia l'insieme A contenuto nell'insieme X: $A \subseteq X$. La differenza $X \setminus A$ si chiama complementare di A rispetto ad X, e si indica con $C_X A$. Se l'insieme X è tutto $\mathbb{R}$ si scriverà anche $C_{\mathbb{R}} A = \overline{A}$.

Esempio 1.9 *Dati gli insiemi*

$$A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x = 2n, n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x = 4n, n \in \mathbb{N}\},$$

determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $C_{\mathbb{N}}A$, $C_{\mathbb{N}}B$, $C_A B$.

Soluzione
L'insieme A è costituito da tutti i multipli di 2:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\},$$

mentre l'insieme B è costituito da tutti i multipli di 4:

$$B = \{4, 8, 12, 16, \ldots\}.$$

1. **Calcolo di** $A \cup B$.
   Poichè evidentemente un multiplo di 4 è anche multiplo di 2, si ha $B \subset A$. Da ciò segue che l'unione tra A e B, cioè gli elementi che appartengono ad A oppure a B, è pari ad A: $A \cup B = A$.

2. **Calcolo di** $A \cap B$.
   Utilizzando ancora il fatto che $B \subset A$, l'intersezione tra A e B, cioè l'insieme costituito dai loro elementi comuni, è pari a B: $A \cap B = B$.

3. **Calcolo di** $B \setminus A$.
   L'insieme differenza $B \setminus A$ è dato da tutti gli elementi di B che non siano elementi di A: poichè tutti gli elementi di B appartengono anche ad A, $B \subset A$, si ha che $B \setminus A = \emptyset$.

4. **Calcolo di** $A \setminus B$.
   L'insieme differenza $A \setminus B$ è invece costituito da tutti quegli elementi di A che non siano elementi di B e, quindi: $A \setminus B = \{2, 6, 10, 14, \ldots\}$.

5. **Calcolo di** $C_{\mathbb{N}}A$.
   L'insieme complementare di A rispetto ad $\mathbb{N}$ è costituito da tutti quegli elementi di $\mathbb{N}$ che non appartengo ad A:

   $$C_{\mathbb{N}}A = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}.$$

   Esso corrisponde a tutti i numeri dispari.

6. **Calcolo di $C_{\mathbb{N}}B$.**
Il complementare di B rispetto ad $\mathbb{N}$ è costituito da tutti quegli elementi di $\mathbb{N}$ che non siano elementi di B:

$$C_{\mathbb{N}}B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, \ldots\}.$$

7. **Calcolo di $C_A B$.**
Ricordando che $C_A B = A \setminus B$, dal punto 4) si ottiene:
$C_A B = \{2, 6, 10, 14, \ldots\}$.

Esempio 1.10 *Dati gli insiemi*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-1| > 2\}, \; B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \ln x \geq 1\},$$

si determinino gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$.

Soluzione
L'insieme A è individuato dalla soluzione della disequazione $|x-1| > 2$, che corrisponde all'insieme

$$\{x - 1 > 2\} \cup \{x - 1 < -2\}.$$

Si ha:

$$x - 1 > 2 \Rightarrow x > 3$$

e

$$x - 1 < -2 \Rightarrow x < -1.$$

Dal grafico della figura 1.1 [a], rappresentante gli insiemi $\{x > 3\}$ e $\{x < -1\}$, si può osservare che l'insieme A soluzione della disequazione $|x-1| > 2$ è

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -\infty < x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \,|\, 3 < x < +\infty\}.$$

L'insieme B è individuato, invece, dalla soluzione della disequazione $\ln x \geq 1$, ovvero

$$\ln x \geq 1 \Rightarrow x \geq e.$$

La rappresentazione grafica degli insiemi A e B è data dalla figura 1.2, da cui si può dedurre dedurre che

$$A \cap B = \{3 < x < +\infty\},$$

$$A \cup B = \{-\infty < x < -1\} \cup \{e \leq x < +\infty\}.$$

Essendo inoltre $\overline{A} = \{-1 \leq x \leq 3\}$, si ha, come si può evincere dalla figura 1.3, $\overline{A} \cap B = \{e \leq x \leq 3\}$.

[a] Per convenzione, nei grafici che rappresentano gli insiemi, un cerchio vuoto sta ad indicare che il punto corrispondente non appartiene all'insieme, mentre un cerchio pieno indica che il punto corrispondente appartiene all'insieme.

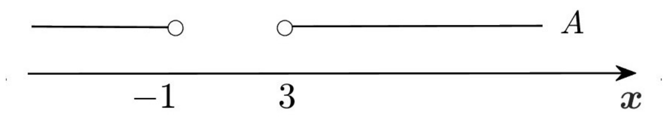

Figura 1.1: L'insieme A dell'esempio 1.10.

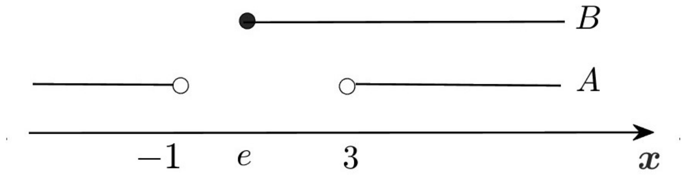

Figura 1.2: Rappresentazione grafica degli insiemi A e B dell'esempio 1.10.

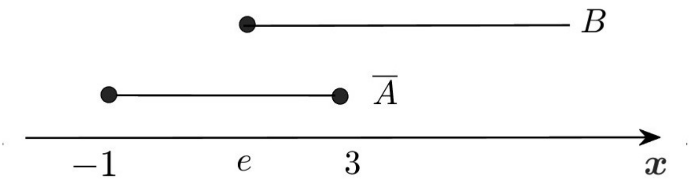

Figura 1.3: Rappresentazione grafica di $\overline{A}$ e B dell'esempio 1.10.

Esercizio 1.6 *Dati gli insiemi*

$$A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x = 10n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x \in \mathbb{N} \,|\, x = 5m, m \in \mathbb{N}\}$$

determinare $A \cap B$ *e* $A \cup B$.

Soluzione: $A \cap B = A, A \cup B = B$.

Esercizio 1.7 *Dati gli insiemi*

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 < 0\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, |\ln x| \geq 1\} \\ C &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, \ln |x| \geq 1\} \end{aligned}$$

si individuino gli elementi degli insiemi $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A} \cup C$, $B \cap C$.

Soluzione: $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = (-\infty, -e]$, $\overline{A} \cup C = (-\infty, -e] \cup [0, +\infty)$, $B \cap C = [e, +\infty)$.

Esercizio 1.8 *Dati gli insiemi*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - x \geq 0\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x + 1 < 0\},$$

si individui l'insieme $A \cap B$.

Soluzione: $A \cap B = (-\infty, -1)$.